Straight Line

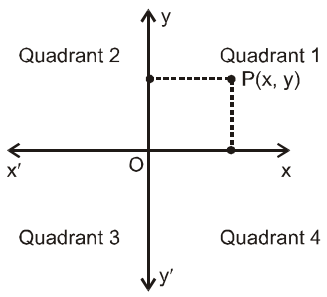
The knowledge of which geometry aims is the knowledge of the eternal..... Plato

A french mathematician and a greatest philosopher named Rene Descartes, pioneered the use of algebra in Geometry. He suggested methods to study geometry by algebraic methods without making direct reference to the actual figures

This geometry was called co-ordinate geometry or analytical geometry and it is the branch of geometry in which algebraic equations are used to denote points, lines and curves.

Rectangular cartesian co-ordinate systems :

We shall right now focus on two-dimensional co-ordinate geometry in which two perpendicular lines called co-ordinate axes (x-axis and y-axis) are used to locate a point in the plane.



O is called origin. Any point P in this plane can be represented by a unique ordered pair (x, y), which are called co-ordinates of that point. x is called x co-ordinate or abscissa and y is called y co-ordinate or ordinate. The two perpendicular lines xox′ and yoy′ divide the plane in four regions which are called quadrants, numbered as shown in the figure.

Let us look at some of the formulae linked with points now.

Distance Formula :

In rectangular Cartesian coordinate system

The distance between the points $A(x_1,y_1)$ and $B(x_2,y_2)$ is = $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$.

Example#1 : Find the value of x, if the distance between the points (x, 8) and (4, 3) is 13

Solution : Let P(x ,8) and Q(4, 3) be the given points. Then PQ = 13 (given)

$\sqrt{(x-4)^2+(8-3)^2} = 13 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 + 25 = 169 \Rightarrow x = 16$ or $x = -8$

Self practice problems :

(1) Show that four points (0, –1), (6, 7) (–2, 3) and (8, 3) are the vertices of a rectangle.

(2) Find the co-ordinates of the circumcentre of the triangle whose vertices are (8, 6), (8, –2) and (2, –2). Also find its circumradius.

Ans. (2) (5, 2), 5

Section Formula :

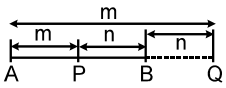
If P(x, y) divides the line joining $A(x_1, y_1)$ & $B(x_2, y_2)$ in the ratio m : n, then;

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} ; y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} .$$

Notes : (i) If $\frac{m}{n}$ is positive, the division is internal, but if $\frac{m}{n}$ is negative, the division is external.

(ii) If P divides AB internally in the ratio m : n & Q divides AB externally in the ratio m : n then P & Q are said to be harmonic conjugate of each other w.r.t. AB.

Mathematically, $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$ i.e. AP, AB & AQ are in H.P.

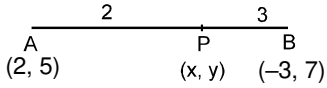


Example # 2 : Find the co-ordinates of the point which divides the line segment joining the points (2, 5) and (– 3, 7) in the ratio 2 : 3 (i) internally and (ii) externally.

Solution : Let P (x, y) be the required point.

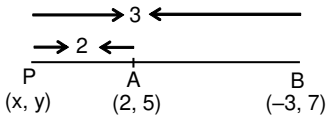
(i) For internal division :

$$(x, y) = \left(\frac{-6+6}{2+3}, \frac{14+15}{2+3}\right) = \left(0, \frac{29}{5}\right)$$



(ii) For external division

$$(x, y) = \left(\frac{-6-6}{2-3}, \frac{14-15}{2-3}\right) = (12, 1)$$



Example # 3 : Find the co-ordinates of points which trisect the line segment joining (2, – 3) and (4, 5).

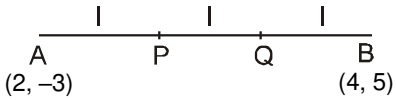
Solution : Let A (2, –3) and B(4, 5) be the given points. Let the points of trisection be P and Q. Then

AP = PQ = QB = λ (say)

$\therefore$ PB = PQ + QB = 2λ and AQ = AP + PQ = 2λ

$\Rightarrow$ AP : PB = $\lambda : 2\lambda$ = 1 : 2 and AQ : QB = $2\lambda : \lambda$ = 2 : 1

So P divides AB internally in the ratio 1 : 2 while Q divides internally in the ratio 2 : 1



So P divides AB internally in the ratio 1:2 while Q divides internally in the ratio 2: 1

$\therefore$ the co-ordinates of P are $\left(\frac{4+4}{1+2}, \frac{5-6}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

and the co-ordinates of Q are $\left(\frac{8+2}{1+2}, \frac{10-3}{1+2}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Hence, the points of trisection are $\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ and $\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Self practice problems :

(3) In what ratio does the point (4, 1) divide the line segment joining the points (1, –2) and (5, 2).

(4) The three vertices of a parallelogram taken in order are (–2, 0), (4, 2) and (5, 3) respectively. Find the co-ordinates of the fourth vertex.

Ans. (3) 3 : 1 internally (4) (–1, 1)

The ratio in which a given line divides the line segment joining two points :

Let the given line ax + by + c = 0 divide the line segment joining $A(x_1, y_1)$ & $B(x_2, y_2)$ in the ratio m : n, then $\frac{m}{n} = -\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$. If A & B are on the same side of the given line then m/n is negative but if A & B are on opposite sides of the given line, then m/n is positive

Example # 4 : Find the ratio in which the line joining the points A (1, 2) and B(– 3, 4) is divided by the line $x + y - 5 = 0$.

Solution : Let the line $x + y = 5$ divides AB in the ratio k : 1 at P

$\therefore$ co-ordinate of P are $\left(\frac{-3k+1}{k+1}, \frac{4k+2}{k+1}\right)$

Since P lies on $x + y - 5 = 0$

$\therefore$ $\frac{-3k+1}{k+1} + \frac{4k+2}{k+1} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ Required ratio is 1 : 2 externally. .

Aliter : Let the ratio is m : n

$\therefore$ $\frac{m}{n} = -\frac{(1\times1+1\times2-5)}{1\times(-3)+1\times4-5} = -\frac{1}{2}$ $\quad\therefore$ ratio is 1 : 2 externally.

Self practice problem :

(5) If the line $2x - 3y + \lambda = 0$ divides the line joining the points A (– 1, 2) & B(– 3, – 3) internally in the ratio 2 : 3, find λ.

Ans. $\frac{18}{5}$

Slope Formula :

If θ is the angle at which a straight line is inclined to the positive direction of x–axis, & $0° \le \theta < 180°$, $\theta \ne 90°$, then the slope of the line, denoted by m, is defined by $m = \tan\theta$. If θ is 90°, m does not exist, but the line is parallel to the y–axis. If $\theta = 0$, then m = 0 & the line is parallel to the x-axis. If A (x_1, y_1) & B (x_2, y_2), $x_1 \ne x_2$, are points on a straight line, then the slope m of the line is given by : $m = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$.

Example # 5 : What is the slope of a line whose inclination with the positive direction of x-axis is :

(i) 30º (ii) 90º (iii) 135º

Solution : (i) Here $\theta = 30º$

Slope = $\tan\theta = \tan 30º = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii) Here $\theta = 90º$

$\therefore$ The slope of line is not defined.

(iii) Here $\theta = 135º$

$\therefore$ Slope = $\tan\theta = \tan 135º = \tan(180º - 45º) = -\tan 45º = -1$.

Example # 6 : Find the slope of the line passing through the points :

(i) (2, 7) and (– 3, 4) (ii) (6, 9) and (–2, 7)

Solution : (i) Let A = (2, 7) and B = (– 3, 4)

$\therefore$ Slope of AB = $\frac{4-7}{-3-2} = \frac{3}{5}$ $\quad\left(\text{Using slope} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$

(ii) Let A = (6, 9), B = (–2, 7) $\quad\therefore$ Slope of AB = $\frac{7-9}{-2-6} = \frac{1}{4}$

Self practice problems :

(6) Find the value of x, if the slope of the line joining (1, 5) and (x, –7) is 4.

(7) What is the inclination of a line whose slope is

(i) 0 (ii) 1 (iii) –1 (iv) $-1/\sqrt{3}$

Ans. (6) – 2 (7) (i) 0º, (ii) 45º, (iii) 135º, (iv) 150º

Condition of collinearity of three points :

Points A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C(x_3, y_3) are collinear if

(i) $m_{AB} = m_{BC} = m_{CA}$ i.e. $\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) = \left(\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right)$

(ii) Δ ABC = 0 i.e. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(iii) AC = AB + BC or AB ~ BC

(iv) A divides the line segment BC in some ratio.

Example # 7 : Show that the points (–2, –1), (2, 7) and (5, 13) are collinear.

Solution : Let (–2, –1) (2, 7) and (5, 13) be the co-ordinates of the points A, B and C respectively.

Slope of AB = $\frac{7+1}{2+2} = 2$ and Slope of BC = $\frac{13-7}{5-2} = 2$

$\therefore$ Slope of AB = slope of BC

$\therefore$ AB & BC are parallel

$\therefore$ A, B, C are collinear because B is on both lines AB and BC.

Self practice problem :

(8) Prove that the points (a, 0), (0, b) and (1, 1) are collinear if $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

Area of a Triangle :

If $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ are the vertices of triangle ABC, then its area is equal to

Δ ABC $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, provided the vertices are considered in the counter clockwise sense. The above formula will give a $(-)$ve area if the vertices (x_i, y_i), i = 1, 2, 3 are placed in the clockwise sense.

Note: Area of n-sided polygon formed by points (x_1, y_1) ; (x_2, y_2); .....;(x_n, y_n) is given by

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

Here vertices are taken in order.

Example # 8 : If the co-ordinates of two points A and B are (2, 1) and (4, –3)respectively. Find the co-ordinates of any point P if PA = PB and Area of ΔPAB = 6.

Solution : Let the co-ordinates of P be (x, y). Then

PA = PB $\Rightarrow$ $PA^2 = PB^2$

$\Rightarrow$ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2$ $\Rightarrow$ $x - 2y = 5$ ....(i)

Now, Area of ΔPAB = 6 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6$ $\Rightarrow$ $4x + 2y - 10 = \pm 12$

$\Rightarrow$ $4x + 2y = 22$ or $4x + 2y = -2$ $\Rightarrow$ $2x + y = 11$ or $2x + y = -1$

Solving $2x + y = 11$ and $x - 2y = 5$ we get $x = \frac{27}{5}$, $y = \frac{1}{5}$.

Solving $2x + y = -1$ and $x - 2y = 5$, we get $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{11}{5}$.

Thus, the co-ordinates of P are $\left(\frac{27}{5}, \frac{1}{5}\right)$ or $\left(\frac{3}{5}, -\frac{11}{5}\right)$

Self practice problems :

(9) The area of a triangle is 5. Two of its vertices are (2, 1) and (3, –2). The third vertex lies on $y = x + 3$. Find the third vertex.

(10) The coordinates of A, B, C are (6, 3), (–3, 5) & (4,–2) respectively and p is any point (x, y).Show that the ratio of the areas of the triangles PBC and ABC is $\left|\frac{x+y-2}{7}\right|$

Ans. (9) $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$ or $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Equation of a Straight Line in various forms :

Now let us understand, how a line can be represented with the help of an algebraic equation. A moving point (point with variable co-ordinates) is assumed on the line and a link is established between its co-ordinates with the help of some given parameters. There are various forms of lines depending on the specified parameter

Point - Slope form :

$y - y_1 = m(x - x_1)$ is the equation of a straight line whose slope is m & which passes through the point (x_1, y_1).

Example # 9 : Find the equation of a line passing through (3, –4) and inclined at an angle of 150º with the positive direction of x-axis.

Solution : Here, m = slope of the line = tan 150º = tan (90º + 60º) =– cot 60º = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = 3$, $y_1 = -4$

So, the equation of the line is $y - y_1 = m(x - x_1)$

i.e. $y + 4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 3)$

$x + \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 3 = 0$

Self practice problem :

(11) Find the equation of s a line passing through P(–3, 5) and whose slope is –2.

Ans. $2x + y + 1 = 0$

Slope-intercept form :

$y = mx + c$ is the equation of a straight line whose slope is m & which makes an intercept c on the y–axis.

Example # 10 : Find the equation of a line with slope –3 and cutting off an intercept of 5 units on negative direction of y-axis.

Solution : Here m = –3 and c = – 5. So, the equation of the line is $y = mx + c$

i.e. $y = -3x - 5$ or $3x + y + 5 = 0$

Self practice problem :

(12) Find the equation of a straight line which cuts off an intercept of length 3 on y- axis and whose slope is – 3.

Ans. $3x + y - 3 = 0$

Two point form : $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ is the equation of a straight line which passes through the points (x_1, y_1) & (x_2, y_2).

Example # 11 : Find the equation of the line joining the points (3, 4) and (–2, 5)

Solution : Here the two points are $(x_1, y_1) = (3, 4)$ and $(x_2, y_2) = (-2, 5)$.

So, the equation of the line in two-point form is

$y - 4 = \frac{5-4}{-2-3}(x - 3) \Rightarrow x + 5y = 23$

Self practice problem :

(13) Find the equations of the sides of the triangle whose vertices are (–1, 8), (4, –2) and (–5, –3). Also find the equation of the median through (–1, 8)

Ans. $2x + y - 6 = 0$, $x - 9y - 22 = 0$, $11x - 4y + 43 = 0$, $21x + y + 13 = 0$

Determinant form : Equation of line passing through (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Example # 12 : Find the equation of line passing through (2, 4) & (– 1, 3).

Solution : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 3y + 10 = 0$

Self practice problem :

(14) Find the equation of the passing through (– 2, 3) & (– 1, – 1).

Ans. $4x + y + 5 = 0$

Intercept form : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ is the equation of a straight line which makes intercepts a & b on OX & OY respectively.

Example # 13 : Find the equation of the line which passes through the point (–3, 8) and the sum of its intercepts on the axes is 7.

Solution : Let the equation of the line be $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ....(i)

This passes through (–3, 8), therefore $-\frac{3}{a} + \frac{8}{b} = 1$ ....(ii)

It is given that $a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - a$.

Putting $b = 7 - a$ in (ii), we get $-\frac{3}{a} + \frac{8}{7-a} = 1$

$\Rightarrow a^2 + 4a - 21 = 0 \Rightarrow a = 3, -7$

For a = 3, b = 4 and for a = –7, b = 14

Putting the values of a and b in (i), we get the equations of the lines

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ and $\frac{x}{-7} + \frac{y}{14} = 1$ or $4x + 3y = 12$ and $2x - y + 14 = 0$

Self practice problem :

(15) Find the equation of the line through (2, 3) so that the segment of the line intercepted between the axes is bisected at this point.

Ans. $3x + 2y = 12$.

Perpendicular/Normal form :

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ (where $p > 0$, $0 \le \alpha < 2\pi$) is the equation of the straight line where the length of the perpendicular from the origin O on the line is p and this perpendicular makes an angle α with positive x–axis.

Example # 14 : Find the equation of the line which is at a distance 3 from the origin and the perpendicular from the origin to the line makes an angle of 30º with the positive direction of the x-axis.

Solution : Here $p = 3$, $\alpha = 30º$

$\therefore$ Equation of the line in the normal form is

$x \cos 30º + y \sin 30º = 3$ or $x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} = 3$ or $\sqrt{3}\,x + y = 6$

Self practice problem :

(16) The length of the perpendicular from the origin to a line is 7 and the line makes an angle of 150º with the positive direction (clock-wise) of y-axis. Find the equation of the line.

Ans. $\sqrt{3}\,x - y + 14 = 0$

General Form : ax + by + c = 0 is the equation of a straight line in the general form

In this case, slope of line = $-\dfrac{a}{b}$

x - intercept = $-\dfrac{c}{a}$, y - intercept = $-\dfrac{c}{b}$

Example # 15 : Find slope, x-intercept & y-intercept of the line 2x – 3y + 5 = 0.

Solution : Here, a = 2, b = – 3, c = 5

$\therefore$ slope = $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}$

x-intercept = $-\dfrac{c}{a} = -\dfrac{5}{2}$

y-intercept = $\dfrac{5}{3}$

Self practice problem :

(17) Find the slope, x-intercept & y-intercept of the line 3x – 5y – 8 = 0.

Ans. (17) $\dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{3}, -\dfrac{8}{5}$

Parametric form :

$P(r) = (x, y) = (x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$ or $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ is the equation of the line in parametric form, where 'r' is the parameter whose absolute value is the distance of any point (x, y) on the line from the fixed point (x_1, y_1) on the line.

Remark : The above form is derived from point-slope form of line.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ where $m = \tan\theta$ $\Rightarrow$ $y - y_1 = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}(x - x_1)$

Example # 16 : Find the equation of the line through the point A(1, 4) and making an angle of 45º with the positive direction of x-axis. Also determine the length of intercept on it between A and the line x + y – 10 = 0

Solution : The equation of a line through A and making an angle of 45º with the x-axis is

$\dfrac{x-1}{\cos 45^\circ} = \dfrac{y-4}{\sin 45^\circ}$ or $\dfrac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{y-4}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ or $x - y + 3 = 0$

Suppose this line meets the line x + y – 10 = 0 at P such that AP = r. Then the co-ordinates of P are given by

$\dfrac{x-1}{\cos 45^\circ} = \dfrac{y-4}{\sin 45^\circ} = r$ $\Rightarrow$ $x = 1 + r\cos 45^\circ,\ y = 4 + r\sin 45^\circ$

$\Rightarrow$ $x = 1 + \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ y = 4 + \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

Thus, the co-ordinates of P are $\left(1 + \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ 4 + \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$

Since P lies on x + y – 10 = 0, so $1 + \dfrac{r}{\sqrt{2}} + 4 + \dfrac{r}{\sqrt{2}} = 10$

$\Rightarrow \quad 5 + \sqrt{2}\, r = 10 \Rightarrow r = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ length AP = | r | = $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

Thus, the length of the intercept = $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Self practice problem :

(18) A straight line is drawn through the point $A\left(\sqrt{3}, 2\right)$ making an angle of $\pi/6$ with positive direction of the x-axis. If it meets the straight line $\sqrt{3x} - 4y + 8 = 0$ in B, find the distance between A and B.

Ans. 6 units

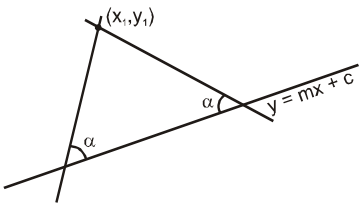
Angle between two straight lines in terms of their slopes:

If m_1 & m_2 are the slopes of two intersecting straight lines ($m_1 m_2 \neq -1$) & θ is the acute angle between them, then $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$.

Notes : (i) Let m_1, m_2, m_3 are the slopes of three lines $L_1 = 0; L_2 = 0; L_3 = 0$ where $m_1 > m_2 > m_3$, then the tangent of interior angles of the Δ ABC formed by these lines are given by, $\tan A = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$; $\tan B = \dfrac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3}$ & $\tan C = \dfrac{m_3 - m_1}{1 + m_3 m_1}$

(ii) The equation of lines passing through point (x_1, y_1) and making angle α with the line y = mx + c are given by :

$(y - y_1) = \tan(\theta - \alpha)(x - x_1)$ & $(y - y_1) = \tan(\theta + \alpha)(x - x_1)$, where $\tan\theta = m$.



Example # 17 : The acute angle between two lines is $\pi/4$ and slope of one of them is –1/3. Find the slope of the other line.

Solution : If θ be the acute angle between the lines with slopes m_1 and m_2, then $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

Let $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ and m_1 –1/3

$\therefore \quad \tan\dfrac{\pi}{4} = \left|\dfrac{-\frac{1}{3} - m_2}{1 - \frac{1}{3} m_2}\right| \Rightarrow 1 = \left|\dfrac{3m_2 + 1}{3 - m_2}\right| \Rightarrow \dfrac{3m_2 + 1}{3 - m_2} = 1$ or -1

Now $\dfrac{3m_2 + 1}{3 - m_2} = 1 \Rightarrow m_2 = \dfrac{1}{2}$ and $\dfrac{3m_2 + 1}{3 - m_2} = -1 \Rightarrow m_2 = -2$.

$\therefore$ The slope of the other line is either 1/2 or –2

Example # 18 : Find the equation of the straight line which passes through the point (3,–2) and making angle 60º with the line $\sqrt{3}\,x + y = 1$.

Solution : Given line is $\sqrt{3}\,x + y = 1$..

$\Rightarrow$ Slope of (1) = $-\sqrt{3}$.

Let slope of the required line be m. Also between these lines is given to be 60º.

$$\Rightarrow \quad \tan 60^\circ = \left|\frac{m-\left(-\sqrt{3}\right)}{1+m\left(-\sqrt{3}\right)}\right| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} = \left|\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m} = \pm\sqrt{3}$$

$$\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad m + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 3m \quad \Rightarrow \quad m = 0$$

the equation of the required line is y + 2 = 0

$$\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m} = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{3}$$

$\therefore$ The equation of the required line is $y + 2 = \sqrt{3}\,(x-3) \quad \Rightarrow \quad y\sqrt{3} = x - 2 - 3\sqrt{3}$

Self practice problem :

(19) A vertex of an equilateral triangle is (2, 3) and the equation of the opposite side is x + y = 2. Find the equation of the other sides of the triangle.

Ans. (19) $(2-\sqrt{3})x - y + 2\sqrt{3} - 1 = 0$ and $(2+\sqrt{3})x - y - 2\sqrt{3} - 1 = 0$.

Parallel Lines :

(i) When two straight lines are parallel their slopes are equal. Thus any line parallel to y = mx + c is of the type y = mx + d, where 'd' is a parameter.

(ii) Two lines ax + by + c = 0 and a′x + b′y + c′ = 0 are parallel if $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.

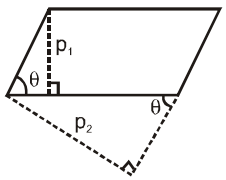
Thus any line parallel to ax + by + c = 0 is of the type ax + by + k = 0, where k is a parameter.

(iii) The distance between two parallel lines with equations $ax + by + c_1 = 0$ &

$ax + by + c_2 = 0$ is $= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

Note that coefficients of x & y in both the equations must be same.

(iv) The area of the parallelogram $= \frac{p_1 p_2}{\sin\theta}$, where p_1 & p_2 are distances between two pairs of opposite sides & θ is the angle between any two adjacent sides. Note that area of the parallelogram bounded by the lines $y = m_1x + c_1$, $y = m_1x + c_2$ and $y = m_2x + d_1$, $y = m_2x + d_2$ is given by $\left|\frac{(c_1-c_2)(d_1-d_2)}{m_1-m_2}\right|$.



Example # 19 : Find the equation of the straight line that has y-intercept 5 and is parallel to the straight line $3x - 7y = 8$.

Solution : Given line is $3x - 7y = 8$

$\therefore$ Slope of (1) is $\frac{3}{7}$

The required line is parallel to (1), so its slope is also 3/7, y-intercept of required line = 5

$\therefore$ By using $y = mx + c$ form, the equation of the required line is

$y = \frac{3}{7}x + 5$ or $3x - 7y + 35 = 0$

Example # 20 : Two sides of a square lie on the lines $5x - 12y + 6 = 0$ and $5x - 12y = 20$. What is its area ?

Solution : Clearly the length of the side of the square is equal to the distance between the parallel lines $5x - 12y + 6 = 0$.....(i) and $5x - 12y = 20$ .....(ii)

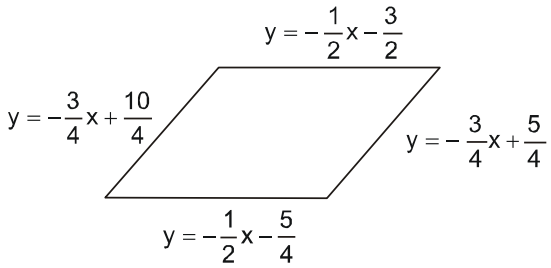
Now, Distance between the parallel lines

$$= \frac{|6+20|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = 2$$

Thus, the length of the side of the square is 2 and hence its area = 4

Example # 21 : Find the area of the parallelogram whose sides are $x + 2y + 3 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$, $2x + 4y + 5 = 0$ and $3x + 4y - 10 = 0$

Solution :



Here, $c_1 = -\frac{3}{2}$, $c_2 = -\frac{5}{4}$, $d_1 = \frac{10}{4}$, $d_2 = \frac{5}{4}$, $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{3}{4}$

$$\therefore \quad \text{Area} = \left| \frac{\left(-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)\left(\frac{10}{4}-\frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)} \right| = \frac{5}{4} \text{ sq. units}$$

Self practice problem :

(20) Find the area of parallelogram whose sides are given by $4x - 5y + 1 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$, $4x - 5y - 2 = 0$ and $2x - 6y + 5 = 0$

Ans. (20) $\frac{51}{14}$ sq. units

Perpendicular Lines:

(i) When two lines of slopes m_1 & m_2 are at right angles, the product of their slopes is -1, i.e. $m_1 m_2 = -1$. Thus any line perpendicular to $y = mx + c$ is of the form $y = -\frac{1}{m}x + d$, where 'd' is any parameter.

(ii) Two lines $ax + by + c = 0$ and $a'x + b'y + c' = 0$ are perpendicular if $aa' + bb' = 0$. Thus any line perpendicular to $ax + by + c = 0$ is of the form $bx - ay + k = 0$, where 'k' is any parameter.

Example # 22 : Find the equation of the straight line that passes through the point (3, 4) and perpendicular to the line $3x + 2y + 5 = 0$

Solution : The equation of a line perpendicular to $3x + 2y + 5 = 0$ is

$$2x - 3y + \lambda = 0 \qquad \text{.....(i)}$$

This passes through the point (3, 4)

$\therefore$ $3 \times 2 - 3 \times 4 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 6$

Putting $\lambda = 6$ in (i), we get $2x - 3y + 6 = 0$, which is the required equation.

Aliter The slope of the given line is –3/2. Since the required line is perpendicular to the given line. So, the slope of the required line is 2/3. As it passes through (3, 4). So, its equation is $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 3)$ or $2x - 3y + 6 = 0$

Self practice problem :

(21) The vertices of a triangle are A(10, 4), B (–4, 9) and C(–2, –1). Find the equation of its altitudes. Also find its orthocentre.

Ans. (21) $x - 5y + 10 = 0$, $12x + 5y + 3 = 0$, $14x - 5y + 23 = 0$, $\left(-1, \frac{9}{5}\right)$

Position of the point (x_1, y_1) relative of the line $ax + by + c = 0$:

If $ax_1 + by_1 + c$ is of the same sign as c, then the point (x_1, y_1) lie on the origin side of $ax + by + c = 0$. But if the sign of $ax_1 + by_1 + c$ is opposite to that of c, the point (x_1, y_1) will lie on the non–origin side of $ax + by + c = 0$.

In general two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) will lie on same side or opposite side of $ax + by + c = 0$ according as $ax_1 + by_1 + c$ and $ax_2 + by_2 + c$ are of same or opposite sign respectively.

Example # 23 : Show that (2, –1) and (–3, 3) lie on the opposite sides of the line $2x - 3y + 5 = 0$.

Solution : At (2, –1), the value of $2x - 3y + 5 = 4 + 3 + 5 = 12 > 0$.

At (–3, 3), the value of $2x - 3y + 5 = -6 - 9 + 5 = -10 < 0$

$\therefore$ The points (2, –1) and (–3, 3) are on the opposite sides of the given line.

Self practice problems :

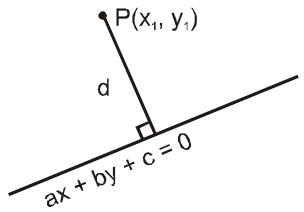
(22) Are the points (3, – 4) and (2, 6) on the same or opposite side of the line $3x - 4y = 8$?

(23) Which one of the points (1, 1), (–1, 2) and (2, 3) lies on the side of the line $4x + 3y - 5 = 0$ on which the origin lies?

Ans. (22) Opposite sides (23) (–1, 2)

Length of perpendicular from a point on a line :

The length of perpendicular from $P(x_1, y_1)$ on $ax + by + c = 0$ is $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$.



Example # 24 : Find the distance between the line 4x – 3y + 8 = 0 and the point (–2, 3)

Solution : The required distance = $\left|\dfrac{(-2)\times 4-3\times 3+8}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| = \dfrac{9}{5}$

Example # 25 : Find all points on x – y + 2 = 0 that lie at a unit distance from the line 12x – 5y + 9 = 0.

Solution : Note that the co-ordinates of an arbitrary point on x – y + 2 = 0 can be obtained by putting x = t (or y = t) and then obtaining y (or x) from the equation of the line, where t is a parameter. Putting x = t in the equation x – y + 2 = 0 of the given line, we obtain y = 2 + t.
So, co-ordinates of an arbitrary point on the given line are P(t, 2 + t). Let P(t, 2 + t) be the required point. Then, distance of P from the line 12x – 5y + 9 = 0 is unity i.e.

$\Rightarrow \quad \left|\dfrac{12t-5(t+2)+9}{\sqrt{12^2+5^2}}\right| = 1 \Rightarrow \quad |7t-1| = 13$

$\Rightarrow \quad 7t - 1 = \pm 13 \quad \Rightarrow \quad t = 2$ or $t = -12/7$

Hence, required points are (2,4) or (–12/7,2/7)

Self practice problem :

(24) Find the length of the altitudes from the vertices of the triangle with vertices : (–1, 1), (5, 2) and (3, –1).

Ans. (24) $\dfrac{16}{\sqrt{13}}, \dfrac{8}{\sqrt{5}}, \dfrac{16}{\sqrt{37}}$

Reflection of a point about a line :

(i) Foot of the perpendicular from a point (x_1, y_1) on the line ax + by + c = 0 is

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = -\left(\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\right)$$

(ii) The image of a point (x_1, y_1) about the line ax + by + c = 0 is

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = -2\left(\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\right)$$

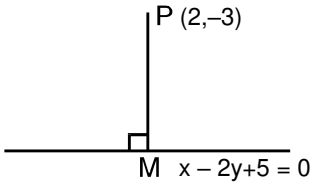
Example # 26 : Find the foot of perpendicular of the line drawn from P (2, –3) on the line x – 2y + 5 = 0.

Solution : Slope of PM = – 2

∴ Equation of PM is

2x + y = 1 .....(i)

solving equation (i) with x – 2y + 5 = 0, we get co-ordinates of M (–3/5, 11/5)



Aliter Here, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = -\dfrac{2+6+5}{1+4} \Rightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = -\dfrac{13}{5} \Rightarrow x = -3/5$, y = 11/5

Example # 27 : Find the image of the point P(–1, 2) in the line mirror 2x – 3y + 4 = 0.

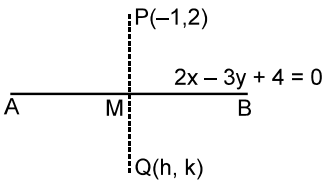
Solution : Let image of P is Q.

∴ PM = MQ & PQ ⊥ AB

Let Q is (h, k)

∴ M is $\left(\dfrac{h-1}{2}, \dfrac{k+2}{2}\right)$

It lies on 2x – 3y + 4 = 0.



$\therefore \quad 2\left(\frac{h-1}{2}\right) - 3\left(\frac{k+2}{2}\right) + 4 = 0.$

or $\quad 2h - 3k = 0 \quad$ .....(i)

slope of PQ = $\frac{k-2}{h+1}$

$PQ \perp AB$

$\therefore \quad \frac{k-2}{h+1} \times \frac{2}{3} = -1. \Rightarrow \quad 3h + 2k - 1 = 0. \quad$ .....(ii)

soving (i) & (ii), we get $h = \frac{3}{13}$, $k = \frac{2}{13}$

$\therefore$ Image of P(– 1, 2) is $Q\left(\frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$

Aliter The image of P (– 1, 2) about the line

$2x - 3y + 4 = 0$ is $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = -2\,\frac{[2(-1)-3(2)+4]}{2^2+(-3)^2}$

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{8}{13}$

$\Rightarrow \quad 13x + 13 = 16 \Rightarrow x = \frac{3}{13}$ & $13y - 26 = -24 \quad \Rightarrow y = \frac{2}{13}$

$\therefore$ image is $\left(\frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$

Self practice problems :

(25) Find the foot of perpendicular of the line drawn from (– 2, – 3) on the line 3x – 2y – 1 = 0.

(26) Find the image of the point (1, 2) in y-axis.

Ans. (25) $\left(\frac{-23}{13}, \frac{-41}{13}\right)$ (26) (– 1, 2)

Centroid, Incentre & Excentre :

If A (x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) are the vertices of triangle ABC, whose sides BC, CA, AB are of lengths a, b, c respectively, then the co-ordinates of the special points of triangle ABC are as follows :

Centroid G $\equiv \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

Incentre I $\equiv \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$, and

Excentre (to A) $I_1 \equiv \left(\frac{-ax_1+bx_2+cx_3}{-a+b+c}, \frac{-ay_1+by_2+cy_3}{-a+b+c}\right)$ and so on.

Notes : (i) Incentre divides the angle bisectors in the ratio, (b + c) : a; (c + a) : b & (a + b) : c.

(ii) Incentre and excentre are harmonic conjugate of each other w.r.t. the angle bisector on which they lie.

(iii) Orthocentre, Centroid & Circumcentre are always collinear & centroid divides the line joining orthocentre & circumcentre in the ratio 2 : 1.

(iv) In an isosceles triangle G, O, I & C lie on the same line and in an equilateral triangle, all these four points coincide.

(v) In a right angled triangle orthocentre is at right angled vertex and circumcentre is mid point of hypotenuse

(vi) In case of an obtuse angled triangle circumcentre and orthocentre both are out side the triangle.

Example # 28: Find the co-ordinates of (i) centroid (ii) in-centre of the triangle whose vertices are (0, 0), (5, 0) and (0, 12).

Solution : (i) We know that the co-ordinates of the centroid of a triangle whose angular points are (x_1, y_1), (x_2, y_2) (x_3, y_3) are $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

So the co-ordinates of the centroid of a triangle whose vertices are (0, 0), (5, 0) and (0, 12) are $\left(\frac{0+5+0}{3}, \frac{0+0+12}{3}\right)$ or $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$.

(ii) Let A (0, 0), B (5, 0) and C(0, 12) be the vertices of triangle ABC.
Then c = AB = 5, b = CA =12
and a = BC = 13.

The co-ordinates of the in-centre are $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

or $\left(\frac{13\times0+12\times5+5\times0}{5+12+13}, \frac{13\times0+12\times0+5\times12}{5+12+13}\right)$ or (2, 2)

Self practice problems :

(27) Two vertices of a triangle are (3, –5) and (–7, 4). If the centroid is (2, –1), find the third vertex.

(28) Find the co-ordinates of the centre of the circle inscribed in a triangle whose vertices are (– 36, 7), (20, 7) and (0, – 8)

Ans. (27) (10, – 2) (28) (–1, 0)

Bisectors of the angles between two lines:

Equations of the bisectors of angles between the lines ax + by + c = 0 & $a'x + b'y + c' = 0$ $(ab' \neq a'b)$ are : $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$

Note : Equation of straight lines passing through $P(x_1, y_1)$ & equally inclined with the lines $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ & $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ are those which are parallel to the bisectors between these two lines & passing through the point P.

Example # 29 : Find the equations of the bisectors of the angle between the straight lines 3x + y + 1 = 0 and x + 3y + 1 = 0.

Solution : The equations of the bisectors of the angles between 3x+y+1= 0 and x+3y+1=0 are $\frac{3x+y+1}{\sqrt{3^2+1^2}}$

$= \pm\frac{x+3y+1}{\sqrt{1^2+3^2}}$ or 3x + y + 1 = ± (x + 3y + 1)

Taking the positive sign, we get x = y as one bisector
Taking the negative sign, we get 2x + 2y + 1 = 0 as the other bisector.

Self practice problem :

(29) Find the equations of the bisectors of the angles between the following pairs of straight lines 3x + 4y + 13 = 0 and 12x – 5y + 32 = 0

Ans. (29) 21x – 77y – 9 = 0 and 99x + 27y + 329 = 0

Methods to discriminate between the acute angle bisector & the obtuse angle bisector:

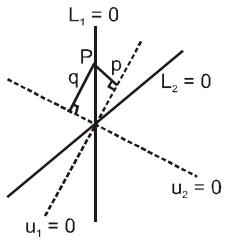
(i) If θ be the angle between one of the lines & one of the bisectors, find tan θ.
If $|\tan\theta| < 1$, then $2\theta < 90°$ so that this bisector is the acute angle bisector.
If $|\tan\theta| > 1$, then we get the bisector to be the obtuse angle bisector.

(ii) Let $L_1 = 0$ & $L_2 = 0$ are the given lines & $u_1 = 0$ and $u_2 = 0$ are the bisectors between $L_1 = 0$ & $L_2 = 0$. Take a point P on any one of the lines $L_1 = 0$ or $L_2 = 0$ and drop perpendicular on $u_1 = 0$ & $u_2 = 0$ as shown in figure. If,

$|p| < |q| \Rightarrow u_1$ is the acute angle bisector.

$|p| > |q| \Rightarrow u_1$ is the obtuse angle bisector.

$|p| = |q| \Rightarrow$ the lines L_1 & L_2 are perpendicular.



(iii) If $aa' + bb' < 0$, then the equation of the bisector of this acute angle is

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = + \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

If, however, $aa' + bb' > 0$, the equation of the bisector of the obtuse angle is :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = + \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Example # 30 : For the straight lines $2x - y + 1 = 0$ and $x - 2y - 2 = 0$, find the equation of the

(i) bisector of the obtuse angle between them;

(ii) bisector of the acute angle between them;

Solution : $2x - y + 1 = 0$ .....(1)

and $x - 2y - 2 = 0$ .....(2)

Here $a_1 = 2, a_2 = 1, b_1 = -1, b_2 = -2$

Now $a_1a_2 + b_1b_2 = 4 > 0$

$\therefore$ bisector of the obtuse angle between lines (1) and (2) will be

$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{x - 2y - 2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

or $x + y + 3 = 0$

and the equation of the bisector of the acute angle will be

$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = -\frac{x - 2y - 2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

or $3x - 3y = 1$

Self practice problem :

(30) Find the equations of the bisectors of the angles between the lines $x + y - 3 = 0$ and $7x - y + 5 = 0$ and state which of them bisects the acute angle between the lines.

Ans. (30) $x - 3y + 10 = 0$ (bisector of the obtuse angle);
$6x + 2y - 5 = 0$ (bisector of the acute angle)

Condition of Concurrency :

Three lines $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ & $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ are concurrent if $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

Alternatively : If three constants A, B & C (not all zero) can be found such that
$A(a_1x + b_1y + c_1) + B(a_2x + b_2y + c_2) + C(a_3x + b_3y + c_3) \equiv 0$, then the three straight lines are concurrent.

Example # 31 : If the straight lines $x + 2y = 9$, $3x + 5y = 5$ and $ax - by = 1$ are concurrent. Then find the value of $35a + 22b$

Solution : Given lines are

$x + 2y = 9$ .....(1)

$3x + 5y = 5$ .....(2)

and $ax - by = 1$ .....(3)

Lines will be concurrent if $\Delta = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 3 & 5 & -5 \\ a & -b & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 35a + 22b = -1$$

Self practice problem :

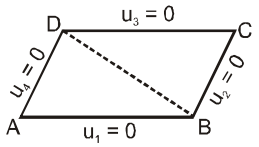
(31) Find the value of m so that the lines $4x - 3y + 2 = 0$, $3x + 4y - 4 = 0$ and $x + my + 6 = 0$ may be concurrent.

Ans. (31) –7

Family of Straight Lines :

The equation of a family of straight lines passing through the point of intersection of the lines, $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ & $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ is given by $L_1 + k\,L_2 = 0$ i.e. $(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, where k is an arbitrary real number.

Note : (i) If $u_1 = ax + by + c$, $u_2 = a'x + b'y + d$, $u_3 = ax + by + c'$, $u_4 = a'x + b'y + d'$ then $u_1=0$; $u_2= 0$; $u_3= 0$; $u_4= 0$ form a parallelogram. The diagonal BD can be given by $u_2u_3 - u_1u_4= 0$.



(ii) The diagonal AC is also given by $u_1 + \lambda u_4 = 0$ and $u_2 + \mu u_3 = 0$, if the two equations are identical for some real λ and μ.
[For getting the values of λ & μ compare the coefficients of x, y & the constant terms].

Example # 32 : If $3a + 2b + 5c = 0$ and the set of lines $ax + by + c = 0$ passes through a fixed point . Find co-ordinates of that point.

Solution : $3a + 2b + 5c = 0$ ..... (i)

$ax + by + c = 0$ ..... (ii)

Eliminating c, we get.

$$ax + by - \frac{1}{5}(3a + 2b) = 0 \Rightarrow a\left(x - \frac{3}{5}\right) + b\left(y - \frac{2}{5}\right) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right) + \frac{b}{a}\left(y - \frac{2}{5}\right) = 0$$

It is of the form $L_1 + \lambda L_2 = 0$

Which passes through the point of intersection $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ of $L_1= 0$ & $L_2= 0$ for all real values of a & b

Aliter : $3a + 2b + 5c = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b + c = 0$

$\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ lies on the line $ax + by + c = 0$ Hence fixed point $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Example # 33 : Obtain the equations of the lines passing through the intersection of lines $3x + 7y = 17$ and $x + 2y = 5$ and is prependicular to the straight line $3x + 4y = 10$.

Solution : The equation of any line through the intersection of the given lines is

$(x + 2y - 5) + \lambda (3x + 7y - 17) = 0$

or $x (3\lambda + 1) + y (7\lambda + 2) - 17\lambda - 5 = 0$ .....(i)

This is prependicular to the line $3x + 4y = 10$

$$\therefore \left(-\frac{3\lambda+1}{7\lambda+2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{11}{37}$$

Putting this value of λ in (i), the equation of required line $4x - 3y + 2 = 0$

Self practice problem :

(32) Find the equation of the lines through the point of intersection of the lines $x - 3y + 1 = 0$ and $2x + 5y - 9 = 0$ and whose distance from the origin is $\sqrt{5}$

Ans. (32) $2x + y - 5 = 0$

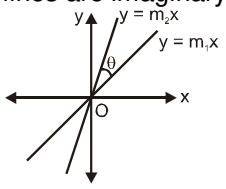
A Pair of straight lines through origin:

(i) A homogeneous equation of degree two, "$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$" always represents a pair of straight lines passing through the origin if :

(a) $h^2 > ab$ $\Rightarrow$ lines are real & distinct .

(b) $h^2 = ab$ $\Rightarrow$ lines are coincident .

(c) $h^2 < ab$ $\Rightarrow$ lines are imaginary with real point of intersection i.e. (0, 0)



This equation is obtained by multiplying the two equations of lines

$(m_1x - y)(m_2x - y) = 0$

$\Rightarrow m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 = 0$

(ii) If $y = m_1x$ & $y = m_2x$ be the two equations represented by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, then;

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \ \& \ m_1 m_2 = \frac{a}{b}.$$

(iii) If θ is the acute angle between the pair of straight lines represented by,

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, then $\tan\theta = \left|\dfrac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$.

(iv) The condition that these lines are :

(a) at right angles to each other is $a + b = 0$. i.e. co–efficient of x^2 +co–efficient of $y^2 = 0$.

(b) coincident is $h^2 = ab$.

(c) equally inclined to the axis of x is $h = 0$.i.e. coeff. of $xy = 0$.

Note that a homogeneous equation of degree n represents n straight lines passing through origin.

(v) The equation to the pair of straight lines bisecting the angles between the straight lines

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is $\dfrac{x^2 - y^2}{a - b} = \dfrac{xy}{h}$.

Example # 34 : Show that the equation $18x^2 - 9xy + y^2 = 0$ represents a pair of distinct straight lines, each passing through the origin. Find the separate equations of these lines.

Solution : The given equation is a homogeneous equation of second degree. So, it represents a pair of straight lines passing through the origin. Comparing the given equation with $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, we obtain a = 18, b = 1 and 2h = – 9.

$\therefore \quad h^2 - ab = \frac{81}{4} - 18 = \frac{9}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad h^2 > ab$

Hence, the given equation represents a pair of distinct lines passing through the origin.

Now, $18x^2 - 9xy + y^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{x}\right) + 18 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x} - 6\right)\left(\frac{y}{x} - 3\right) = 0$

$\Rightarrow \quad -6 = 0$ or $-3 = 0 \Rightarrow y - 6x = 0$ or $y - 3x = 0$

So the given equation represents the straight lines $y - 3x = 0$ and $y - 6x = 0$.

Example # 35 : Find the equations to the pair of lines through the origin which are perpendicular to the lines represented by $6x^2 - xy - 12y^2 = 0$.

Solution : We have $6x^2 - xy - 12y^2 = 0$.

$\Rightarrow \quad 6x^2 - 9xy + 8xy - 12y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x + 4y)(2x - 3y) = 0$

$\Rightarrow \quad 3x + 4y = 0$ & $2x - 3y = 0$

Thus the given equation represents the lines $3x + 4y = 0$ and $2x - 3y = 0$. The equations of the lines passing through the origin and perpendicular to the given lines are $4x - 3y = 0$ & $3x + 2y = 0$ there combined equations $12x^2 - xy - 6y^2 = 0$

Example # 36 : Find the angle between the pair of straight lines $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

Solution : Given equation is $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

Here a = coeff. of $x^2 = 1$, b = coeff. of $y^2 = 2$

and 2h = coeff. of xy = –3 $\quad \therefore \quad h = -\frac{3}{2}$

Now $\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{1 + 2}\right| = \frac{1}{3}$

Where θ is the acute angle between the lines.

$\therefore$ acute angle between the lines is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ and obtuse angle between them is

$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

Example # 37 : Find the equation of the bisectors of the angle between the lines represented by $3x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

Solution : Given equation is $3x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$ .....(1)

comparing it with the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ .....(2)

we have a = 3, 2h = –5; and b = 4

Now the equation of the bisectors of the angle between the pair of lines (1) is

$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$ or $\frac{x^2 - y^2}{3 - 4} = \frac{xy}{-\frac{5}{2}}$; or $\frac{x^2 - y^2}{-1} = \frac{2xy}{-5}$ or $5x^2 - 2xy - 5y^2 = 0$

Self practice problems :

(33) Find the area of the triangle formed by the lines $y^2 - 9xy + 18x^2 = 0$ and y = 9.

(34) If the pairs of straight lines $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ and $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ be such that each pair bisects the angle between the other pair, prove that pq = –1.

Ans. (33) $\frac{27}{4}$ sq. units

General equation of second degree representing a pair of Straight lines :

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents a pair of straight lines if :

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$, i.e. if $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$

Such an equation is obtained again by multiplying the two equation of lines
$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

(ii) The angle θ between the two lines representing by a general equation is the same as that between the two lines represented by its homogeneous part only.

Example # 38 : Prove that the equation $6x^2 + 13xy + 6y^2 + 8x + 7y + 2 = 0$ represents a pair of straight lines. Find the co-ordinates of their point of intersection.

Solution : Given equation is $6x^2 + 13xy + 6y^2 + 8x + 7y + 2 = 0$
Writing the equation (1) as a quadratic equation in x we have
$6x^2 + (13y + 8)x + 6y^2 + 7y + 2 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-(13y+8) \pm \sqrt{(13y+8)^2 - 4.6(6y^2+7y+2)}}{12}$$

$$= \frac{-(13y+8) \pm \sqrt{169y^2 + 208y + 64 - 144y^2 - 168y - 48}}{12}$$

$$= \frac{-(13y+8) \pm \sqrt{25y^2 + 40y + 16}}{12} = \frac{-(13y+8) \pm (5y+4)}{12}$$

$\Rightarrow$ $12x = -13y - 8 + 5y + 4$ or $12x = -13y - 8 - 5y - 4$

$\Rightarrow$ $3x + 2y + 1 = 0$ or $2x + 3y + 2 = 0$

Hence equation (1) represents a pair of straight lines whose equation are
$3x + 2y + 1 = 0$ .....(1) and $2x + 3y + 2 = 0$ .....(2)
Solving these two equations, the required point of intersection is

Self practice problem :

(35) Find the combined equation of the straight lines passing through the point (1, 1) and parallel to the lines represented by the equation $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ and find the angle between them.

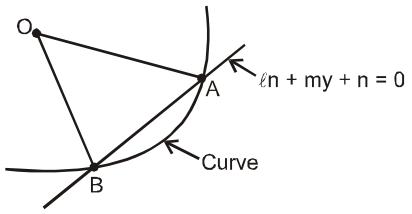
Ans. (35) $x^2 - 5xy + 4y^2 + 3x - 3y = 0$, $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

Homogenization :

This method is used to write the joint equation of two lines connecting origin to the points of intersection of a given line and a given second degree curve. The equation of a pair of straight lines joining origin to the points of intersection of the line $L \equiv \ell x + my + n = 0$ and a second degree curve
$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

is $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx\left(\frac{\ell x + my}{-n}\right) + 2fy\left(\frac{\ell x + my}{-n}\right) + c\left(\frac{\ell x + my}{-n}\right)^2 = 0.$

The equation is obtained by homogenizing the equation of curve with the help of equation of line.



Notes : (i) Here we have written 1 as $\frac{\ell x + my}{-n}$ and converted all terms of the curve to second degree expressions

(ii) Equation of any curve passing through the points of intersection of two curves $C_1 = 0$ and $C_2 = 0$ is given by $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$, where λ & μ are parameters.

Example # 39 : All chords of the curve $2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y = 0$ which subtend a right angle at the origin passes through a fixed point. Find that point

Solution : Let $Ax + By = 1$ be a chord of the curve $2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y = 0$

Equation of the given curve is $2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y = 0$

and equation of the chord is $Ax + By = 1$ ....(i)

Making equation (1) homogeneous equation of the second degree in x any y with the help of (1), we have $2x^2 - 3y^2 + 4x(Ax + By) - 2y(Ax + By) = 0$

$x^2(2 + 4A) + y^2(-3 - 2B) + xy(4B - 2A) = 0$ ....(ii)

since line represented by (ii) are at right angle

$\Rightarrow$ coefficient of x^2+ coefficient of $y^2 = 0$

$\Rightarrow$ $2 + 4A + (-3 - 2B) = 0$

$4A - 2B = 1$

chord $Ax + By = 1$

$x = 4 \quad y = -2$

fixed point $(4, -2)$

Self practice problems :

(36) Find the equation of the straight lines joining the origin to the points of intersection of the line $3x + 4y - 5 = 0$ and the curve $2x^2 + 3y^2 = 5$.

(37) Find the equation of the straight lines joining the origin to the points of intersection of the line $lx + my + n = 0$ and the curve $y^2 = 4ax$. Also, find the condition of their perpendicularity.

Ans. (36) $x^2 - y^2 - 24xy = 0$ (37) $4alx^2 + 4amxy + ny^2 = 0$; $4al + n = 0$

सरल रेखा (Straight Line)

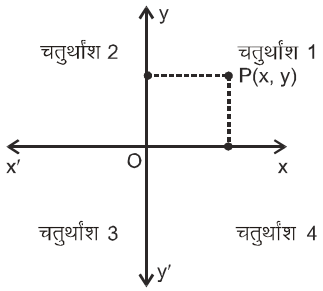
The knowledge of which geometry aims is the knowledge of the eternal..... Plato

एक फ्रांसीसी गणितज्ञ और एक महान विचारक जिनका नाम रेने डिस्कार्ट, ने बीजगणित में ज्यामितिय उपयोग को खोजा। उन्होने ज्यामितिय के अध्ययन को बीजगणितीय विधियों से, बिना वास्तविक चित्र बनाऐं हल करने की सलाह दी।

यह ज्यामिति निर्देशांक ज्यामितीय या विश्लेषण ज्यामिति कहलाती है और यह ज्यामिति की वह शाखा है जिसमें बीजगणितीय समीकरण का उपयोग बिन्दुओं, रेखाओं और वक्रों को निरूपित करने में होता है

आयतीय (कार्तिय) निर्देश तंत्र (Rectangular cartesian coordinate systems) :

अब हम द्विविम निर्देशांक ज्यामिति पर ध्यान देंगे जिसमें दो लम्बवत् रेखाएँ , निर्देशी अक्ष (x-अक्ष तथा y-अक्ष) कहलाती है, जो एक समतल में एक बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने में प्रयुक्त होती है।



O मूल बिन्दु कहलाता है। इस समतल में कोई बिन्दु P एक अद्वितीय क्रमित युग्म (x, y) द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है, जिन्हें उस बिन्दु के निर्देशांक कहते हैं। x, x-निर्देशांक या भुज तथा y, y-निर्देशांक या कोटि कहलाता है। दो लम्बवत रेखाएँ xox′ तथा yoy′ समतल को चार भागों में विभक्त करती है जिन्हें चतुर्थांश कहते है, जो कि चित्रानुसार क्रमांकित हैं।

दूरी सूत्र (Distance Formula)

आयतीय निर्देशांक पद्धति में

$A(x_1,y_1)$ और $B(x_2,y_2)$ के मध्य दूरी = $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$.

उदाहरण # 1 : यदि बिन्दुओं (x, 8) एवं (4, 3) के बीच की दूरी 13 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना P(x ,8) तथा Q(4, 3) दिए गए बिन्दु है। PQ = 13 (दिया हुआ है)

$\sqrt{(x-4)^2+(8-3)^2} = 13 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 + 25 = 169 \Rightarrow x = 16$ या $x = -8$

अभ्यास प्रश्न

(1) प्रदर्शित कीजिए कि चार बिन्दु (0, –1), (6, 7) (–2, 3) एवं (8, 3) एक आयत के शीर्ष है।

(2) त्रिभुज के परिकेन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (8, 6), (8, –2) एवं (2, –2) हैं। इसकी परित्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

Ans. (2) (5, 2), 5

विभाजन सूत्र (Section Formula) :

यदि P(x, y) बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ एवं $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा को m : n अनुपात में विभाजित करता है, तो

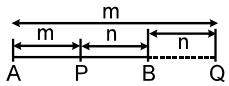
$x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}$; $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$.

नोट :

(i) यदि $\frac{m}{n}$ धनात्मक है तो विभाजन, अन्तःविभाजन होगा लेकिन यदि $\frac{m}{n}$ ऋणात्मक है तो यह बाह्य विभाजन होगा।

(ii) यदि P, AB को m : n अनुपात में अन्तःविभाजित तथा Q, AB को m : n अनुपात में बाह्य विभाजित करते है तो P एवं Q, AB के सापेक्ष एक दूसरे के **हरात्मक संयुग्मी** कहलाते है।
गणितीय रूप में

$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$ अर्थात AP, AB एवं AQ हरात्मक श्रेढ़ी में है।

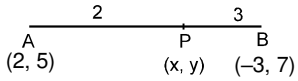


उदारहण # 2 : उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (2, 5) एवं (– 3, 7) को मिलाने वाली रेखा को 2 : 3 अनुपात में (i) अन्तः विभाजित करता है (ii) बाह्य विभाजित करता है।

हल : माना कि वह बिन्दु P (x, y) है।

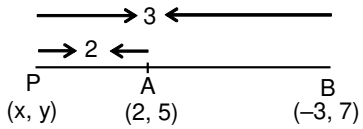
(i) अन्तः विभाजन के लिए

$$(x, y) = \left(\frac{-6+6}{2+3}, \frac{14+15}{2+3}\right) = \left(0, \frac{29}{5}\right)$$



(ii) बाह्य विभाजन के लिए

$$(x, y) = \left(\frac{-6-6}{2-3}, \frac{14-15}{2-3}\right) = (12, 1)$$

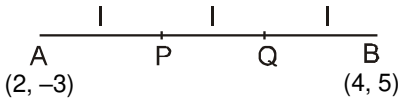


उदाहरण # 3 : उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (2,–3) एवं (4, 5) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को समत्रिविभाजित करते है।

हल : माना दिए गए बिन्दु A (2, –3) एवं B(4, 5) है।
माना त्रिविभाजन बिन्दु P एवं Q है। तब AP = PQ = QB = λ (माना)

$\therefore$ PB = PQ + QB = 2λ एवं AQ = AP + PQ = 2λ

$\Rightarrow$ AP : PB = $\lambda : 2\lambda$ = 1 : 2 एवं AQ : QB = $2\lambda : \lambda$ = 2 : 1



अतः P, AB को 1 : 2 अनुपात में अन्तःविभाजित करता है जबकि Q इसे 2 : 1 अनुपात में अन्तःविभाजित करता हैं।

$\therefore$ P के निर्देशांक $\left(\frac{4+4}{1+2}, \frac{5-6}{1+2}\right)$ या $\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ तथा Q के निर्देशांक $\left(\frac{8+2}{1+2}, \frac{10-3}{1+2}\right)$ या $\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$

अतः त्रिविभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक $\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ एवं $\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$ हैं।

अभ्यास कार्य :

(3) बिन्दु (4, 1) बिन्दुओं (1, –2) एवं (5, 2) को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करता है ?

(4) यदि समान्तर चतुर्भुज के तीन शीर्ष एक ही क्रम में क्रमशः (–2, 0), (4, 2) एवं (5, 3) लिए जाते है तो चतुर्थ शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Ans. (3) 3 : 1 अन्तः विभाजन (4) (–1, 1)

अनुपात जिसमें दी गई सरल रेखा, दिये गये बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को विभाजित करता है (The ratio in which a given line divides the line segment joining two points) :

माना दी गई सरल रेखा $ax + by + c = 0$ बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ एवं $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को m : n अनुपात में विभाजित करता है तो $\frac{m}{n} = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$.

यदि बिन्दु A एवं B दी गई सरल रेखा के एक ही ओर स्थित हो, तो अनुपात m/n ऋणात्मक होता है तथा बिन्दुओं के सरल रेखा के विपरीत ओर स्थित होने पर अनुपात m/n धनात्मक होता है।

उदाहरण # 4 : सरल रेखा $x + y - 5 = 0$ बिन्दुओं A (1, 2) एवं B(– 3, 4) को मिलाने से प्राप्त रेखाखण्ड को जिस अनुपात में विभाजित करती है वह अनुपात ज्ञात करो।

हल : माना सरल रेखा $x + y = 5$, रेखाखण्ड AB को बिन्दु P पर k : 1 के अनुपात में विभाजित करती है।

$\therefore$ बिन्दु P के निर्देशांक $\left(\frac{-3k+1}{k+1}, \frac{4k+2}{k+1}\right)$

चूंकि बिन्दु P सरल रेखा $x + y - 5 = 0$ पर स्थित हैं –

$\therefore$ $\frac{-3k+1}{k+1} + \frac{4k+2}{k+1} - 5 = 0 \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ अतः अभीष्ठ अनुपात 1 : 2 (बाह्य विभाजन) होगा।

अन्य विधि : माना अभीष्ठ अनुपात 1 : 2 है।

$\therefore$ $\frac{m}{n} = -\frac{(1\times1+1\times2-5)}{1\times(-3)+1\times4-5} = -\frac{1}{2}$ $\therefore$ अनुपात 1 : 2 बाह्य विभाजन होगा।

अभ्यास कार्य :

(5) यदि सरल रेखा $2x - 3y + \lambda = 0$, बिन्दुओं A (– 1, 2) एवं B(– 3, – 3) को मिलाने से प्राप्त रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करती है तो λ का मान ज्ञात करो।

Ans. 18/5

प्रवणता सूत्र (Slope Formula) :

यदि एक सरल रेखा x–अक्ष की धनात्मक दिशा से θ कोण पर झुकी हुई है तथा $0° \le \theta < 180°$, $\theta \ne 90°$ हो, तो रेखा की प्रवणता को m द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा $m = \tan\theta$ द्वारा परिभाषित है। यदि θ का मान 90° है, तो m विद्यमान नहीं होगा परन्तु रेखा y–अक्ष के समान्तर होगी। यदि $\theta = 0$ हो, तो m = 0 तथा रेखा x–अक्ष के समान्तर होगी।

यदि A (x_1, y_1) एवं B (x_2, y_2), $x_1 \ne x_2$, बिन्दु सरल रेखा पर है, तो रेखा की प्रवणता $m = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$ द्वारा दी जाती है।

उदाहरण # 5 : उस सरल रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए जिनके x-अक्ष की धनात्मक दिशा से झुकाव निम्नलिखित है :

(i) 30º (ii) 90º (iii) 135º

हल : (i) यहाँ $\theta = 30º$

प्रवणता $= \tan\theta = \tan 30º = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii) यहाँ $\theta = 90º$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता परिभाषित नही है।

(iii) यहाँ $\theta = 135º$

$\therefore$ प्रवणता $= \tan\theta = \tan 135º = \tan(180º - 45º) = -\tan 45º = -1$.

उदाहरण # 6 : निम्नलिखित बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए :

(i) (2, 7) तथा (– 3, 4) (ii) (6, 9) तथा (–2, 7)

हल : (i) माना A = (2, 7) एवं B = (–3, 4)

$\therefore$ AB की प्रवणता $= \frac{4-7}{-3-2} = \frac{3}{5}$ $\left(\text{प्रवणता} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\text{द्वारा}\right)$

(ii) माना A = (6, 9), B = (–2, 7)

$\therefore$ AB की प्रवणता $= \frac{7-9}{-2-6} = \frac{1}{4}$

अभ्यास कार्य :

(6) यदि (1, 5) तथा (x, –7) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता 4 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

(7) रेखा का झुकाव ज्ञात कीजिए जिनकी प्रवणताएँ निम्नलिखित है

(i) 0 (ii) 1 (iii) –1 (iv) $-1/\sqrt{3}$

Ans. (6) – 2 (7) (i) 0º, (ii) 45º, (iii) 135º, (iv) 150º

तीन बिन्दुओं के संरेखीय होने का प्रतिबन्ध (Condition of collinearity of three points) :

बिन्दु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ संरेखीय होगें यदि

(i) $m_{AB} = m_{BC} = m_{CA}$ अर्थात् $\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) = \left(\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right)$

(ii) $\Delta ABC = 0$ अर्थात् $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(iii) AC = AB + BC या AB ~ BC

(iv) रेखाखण्ड BC को बिन्दु A किसी अनुपात में विभाजित करता हो।

उदाहरण # 7 : प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु (–2, –1), (2, 7) तथा (5, 13) संरेखीय है।

हल : माना (–2, –1) (2, 7) तथा (5, 13) क्रमशः A, B तथा C बिन्दुओं के निर्देशांक है।

AB की प्रवणता $= \frac{7+1}{2+2} = 2$ तथा BC की प्रवणता $= \frac{13-7}{5-2} = 2$

$\therefore$ AB की प्रवणता = BC की प्रवणता

$\therefore$ AB एवं BC समान्तर है।

$\therefore$ A, B, C संरेखीय है क्योंकि B, AB तथा BC दोनों रेखाओं पर स्थित है।

अभ्यास कार्य :

(8) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (a, 0), (0, b) एवं (1, 1) संरेखीय है यदि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle)

यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ एवं $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष हो, तो

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ द्वारा दिया जाता है जबकि त्रिभुज के शीर्ष वामावर्त क्रम में लिये गये है।

यही सूत्र, शीर्षों को दक्षिणावर्त क्रम में लेने पर ऋणात्मक क्षेत्रफल देता है।

नोट : शीर्षों (x_1, y_1) ; (x_2, y_2); .....(x_n, y_n) से बने n- भुजाओं वाले बहुभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right)$ होता है।

उदाहरण # 8 : यदि दो बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (2, 1) एवं (4, –3) है, तो किसी बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जबकि PA = PB एवं ΔPAB का क्षेत्रफल 6 वर्ग इकाई है।

हल : माना कि P के निर्देशांक (x, y) है, तो

$PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2 \Rightarrow x - 2y = 5$ ....(i)

अब, ΔPAB का क्षेत्रफल = 6 $\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6 \Rightarrow 4x + 2y - 10 = \pm 12$

$\Rightarrow 4x + 2y = 22$ या $4x + 2y = -2 \Rightarrow 2x + y = 11$ या $2x + y = -1$

$2x + y = 11$ और $x - 2y = 5$ को हल करने पर $x = \frac{27}{5}$, $y = \frac{1}{5}$ मिलता है। इसी प्रकार $2x + y = -1$ और $x - 2y = 5$ को हल करने पर $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{11}{5}$ मिलता है। अतः P के निर्देशांक $\left(\frac{27}{5}, \frac{1}{5}\right)$ या $\left(\frac{3}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ है।

अभ्यास कार्य :

(9) यदि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 5 वर्ग इकाई है। इसके दो शीर्ष (2, 1) तथा (3, –2) है। तीसरा शीर्ष $y = x + 3$ पर स्थित है। तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

(10) बिन्दु A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (6, 3), (–3, 5) तथा (4, –2) तथा p(x, y) एक बिन्दु है। प्रदर्शित कीजिए की त्रिभुज PBC तथा त्रिभुज ABC के क्षेत्रफलो का अनुपात $\left|\frac{x+y-2}{7}\right|$ है।

Ans. (9) $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$ या $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

विभिन्न रूपों में रेखा का समीकरण (Equation of a Straight Line in various forms) :

अब हम यह समझते है कि किस प्रकार एक बीजगणीय समीकरण की सहायता से एक रेखा को दर्शाया जा सकता है। रेखा पर एक चर बिन्दु (बिन्दु जिसके निर्देशांक चर हैं) मानते हैं और कुछ प्राचल की सहायता से इसके निर्देशांकों के बीच एक संबद्व स्थापित करते है। प्राचल पर निर्भर करने वाले रेखा के विभिन्न रूप है।

बिन्दु–प्रवणता रूप (point-slope form) : $y - y_1 = m(x - x_1)$ उस सरल रेखा का समीकरण है जिसकी प्रवणता m है तथा जो बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरती हो।

उदाहरण # 9 : बिन्दु (3, –4) से गुजरने वाली एवं x-अक्ष की धनात्मक दिशा से 150º के कोण पर झुकी हुई रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ m = रेखा की प्रवणता $= \tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$x_1 = 3, y_1 = -4$

अतः रेखा का समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ से –

अर्थात $y + 4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 3)$

$x + \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 3 = 0$

अभ्यास कार्य :

(11) बिन्दु P(–3, 5) से जाने वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी प्रवणता –2 है।

Ans. $2x + y + 1 = 0$

प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप (slope-intercept form) : y = mx + c उस सरल रेखा की समीकरण है जिसकी प्रवणता m है तथा वह y–अक्ष पर c अन्तःखण्ड बनाती हो।

उदाहरण # 10 : –3 प्रवणता वाली एवं y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा पर 5 इकाई का अन्तःखण्ड काटने वाली सरल रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ m = –3 तथा c = – 5,अतः रेखा का समीकरण $y = mx + c$

अर्थात् $y = -3x - 5$ या $3x + y + 5 = 0$

अभ्यास कार्य :

(12) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष पर 3 इकाई लम्बाई का अन्तःखण्ड काटती है तथा जिसकी प्रवणता –3 है।

Ans. $3x + y - 3 = 0$

दो बिन्दु रूप (Two point form): $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ उस सरल रेखा का समीकरण है जो बिन्दु (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) से गुजरती है।

उदाहरण # 11 : बिन्दु (3, 4) एवं (–2, 5) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ दो बिन्दु $(x_1, y_1) = (3, 4)$ एवं $(x_2, y_2) = (-2, 5)$ है

अतः दो बिन्दु रूप से रेखा का समीकरण–

$y - 4 = \frac{5-4}{-2-3}(x - 3) \Rightarrow x + 5y = 23$

अभ्यास कार्य :

(13) उस त्रिभुज की भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–1, 8), (4, –2) एवं (–5, –3) है। बिन्दु (–1, 8) से गुजरने वाली माध्यिका का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

Ans. $2x + y - 6 = 0$, $x - 9y - 22 = 0$, $11x - 4y + 43 = 0$, $21x + y + 13 = 0$

सारणिक रूप (Determinant form) : बिन्दुओं (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ है।

उदाहरण # 12 : (2, 4) एवं (– 1, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 10 = 0$

अभ्यास कार्य :

(14) (– 2, 3) एवं (– 1, – 1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $4x + y + 5 = 0$

अन्तःखण्ड रूप (Intercept form): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ उस सरल रेखा का समीकरण है जो OX एवं OY अक्षों पर क्रमशः a एवं b लम्बाई के अन्तःखण्ड बनाती है।

उदाहरण # 13 : उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–3, 8) से गुजरती है तथा इसके द्वारा अक्षों पर काटे गए अन्तखण्डों का योग 7 है।

हल : माना रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है। ....(i)

यह बिन्दु (–3, 8) से गुजरती है, अतः $-\frac{3}{a} + \frac{8}{b} = 1$ ....(ii)

यह दिया गया है कि $a + b = 7$

$\Rightarrow$ $b = 7 - a$ समीकरण (ii) में $b = 7 - a$ रखने पर $-\frac{3}{a} + \frac{8}{7-a} = 1$

$\Rightarrow$ $a^2 + 4a - 21 = 0 \Rightarrow$ $a = 3, -7$

$a = 3$ के लिए $b = 4$ तथा $a = -7$ के लिए $b = 14$

समीकरण (i) में a तथा b के मान रखने पर रेखाओं के समीकरण

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ तथा $\frac{x}{-7} + \frac{y}{14} = 1$ या $4x + 3y = 12$ तथा $2x - y + 14 = 0$

अभ्यास कार्य :

(15) बिन्दु (2, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए ताकि अक्षों के मध्य रेखा का अन्तःखण्ड इस बिन्दु पर समद्विभाजित हो।

Ans. $3x + 2y = 12$.

लम्ब/अभिलम्ब रूप (Perpendicular/normal form): $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

(जहाँ $p > 0$, $0 \le \alpha < 2\pi$) सरल रेखा का समीकरण है जबकि मूल बिन्दु O से रेखा पर लम्ब की लम्बाई p है तथा यह लम्ब x-अक्ष की धनात्मक दिशा से α कोण बनाता है।

उदाहरण # 14 : उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 3 इकाई दूरी पर है तथा मूल बिन्दु से रेखा पर लम्ब x-अक्ष की धनात्मक दिशा से 30º का कोण बनाता है।

हल : यहाँ $p = 3$, $\alpha = 30^\circ$ $\therefore$ अभिलम्ब रूप में रेखा की समीकरण

$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ = 3$ या $x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} = 3$ या $\sqrt{3}x + y = 6$

अभ्यास कार्य :

(16) मूल बिन्दु से किसी रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई 7 इकाई है तथा रेखा x–अक्ष की धनात्मक दिशा से 150º का कोण बनाती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $\sqrt{3}\,x - y + 14 = 0$

व्यापक रूप (General form): रेखा की व्यापक रूप में समीकरण $ax + by + c = 0$ होती है।

इस स्थिति में रेखा की प्रवणता $= -\dfrac{a}{b}$

x - अन्तखण्ड $= -\dfrac{c}{a}$, y - अन्तखण्ड $= -\dfrac{c}{b}$

उदाहरण # 15 : रेखा $2x - 3y + 5 = 0$ की प्रवणता, तथा इसके द्वारा x एवं y अक्षों पर काटे गये अन्तखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 2, b = -3, c = 5$ $\therefore$ प्रवणता $= -\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}$

x-अन्तःखण्ड $= -\dfrac{c}{a} = -\dfrac{5}{2}$ y-अन्तःखण्ड $= \dfrac{5}{3}$

अभ्यास कार्य :

(17) रेखा $3x - 5y - 8 = 0$ की प्रवणता, x-अन्तःखण्ड एवं y-अन्तखण्ड ज्ञात कीजिए।

Ans. $\dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{3}, -\dfrac{8}{5}$

प्राचलिक रूप (Parametric form): $P(r) = (x, y) = (x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$ या $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ रेखा का प्राचलिक रूप में समीकरण है, जबकि 'r' प्राचल है जिसका यथार्थ मान रेखा पर स्थित बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा पर किसी बिन्दु (x, y) की दूरी के बराबर होता है।

टिप्पणी: उपरोक्त रूप को एक बिन्दु ढाल रूप से ज्ञात किया जाता है। $y - y_1 = m(x - x_1)$ जबकि $m = \tan\theta$

$$\Rightarrow y - y_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x - x_1)$$

उदाहरण # 16 : बिन्दु A(1, 4) से गुजरने वाली तथा धनात्मक x–अक्ष से 45º का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। इस सरल रेखा द्वारा बिन्दु A (1, 4) एवं सरल रेखा $x + y - 10 = 0$ के मध्य काटे गये अन्तः खण्ड की लम्बाई भी ज्ञात करो।

हल : A से गुजरने वाली तथा x–अक्ष से 45º का कोण बनाने वाली रेखा की समीकरण

$$\frac{x-1}{\cos 45^\circ} = \frac{y-4}{\sin 45^\circ} \text{ or } \frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \text{या} \quad x - y + 3 = 0$$

माना यह रेखा, सरल रेखा $x + y - 10 = 0$ को बिन्दु P पर इस प्रकार मिलती है कि AP = r, तो P के निर्देशांक

$\dfrac{x-1}{\cos 45^\circ} = \dfrac{y-4}{\sin 45^\circ} = r$ द्वारा दिए जाते है। अतः बिन्दु P के निर्देशांक $\left(1 + \dfrac{r}{\sqrt{2}}, 4 + \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ है।

चूंकि बिन्दु P रेखा $x + y - 10 = 0$ पर स्थित है अतः $1 + \dfrac{r}{\sqrt{2}} + 4 + \dfrac{r}{\sqrt{2}} = 10$

$$\Rightarrow \quad 5 + \sqrt{2}\,r = 10 \Rightarrow r = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \text{length AP} = |r| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

अतः अन्तःखण्ड की लम्बाई $= \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

अभ्यास कार्य :

(18) एक सरल रेखा जो बिन्दु A $\left(\sqrt{3}, 2\right)$ से गुजरती है तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा से $\pi/6$ कोण बनाती है। यदि यह रेखा एक अन्य सरल रेखा $\sqrt{3x} - 4y + 8 = 0$ को बिन्दु B पर मिलती है, तो A एवं B के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

Ans. 6 इकाई

प्रवणताओं के रूप में दो रेखाओं के मध्य कोण
(Angle between two straight lines in terms of their slopes) :

यदि m_1 एवं m_2 दो प्रतिच्छेदी रेखाओं की प्रवणताएँ ($m_1 m_2 \neq -1$) हो तथा θ उनके बीच का न्यूनकोण हो, तो

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| .$$

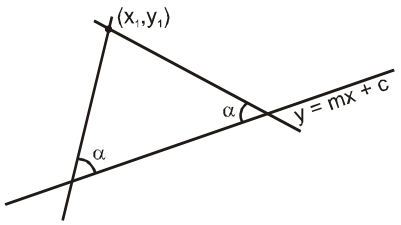
नोट : (i) माना m_1, m_2, m_3 क्रमशः तीन रेखाओं $L_1 = 0; L_2 = 0; L_3 = 0$ की प्रवणताएँ है। जहाँ $m_1 > m_2 > m_3$ हो, तो इन सरल रेखाओं द्वारा बनाये गये त्रिभुज ABC के अन्तःकोण निम्न प्रकार दिये जाते है–

$$\tan A = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \; ; \tan B = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3} \text{ एवं } \tan C = \frac{m_3 - m_1}{1 + m_3 m_1}$$

(ii) बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा सरल रेखा $y = mx + c$ से α कोण बनाने वाली रेखाओं के समीकरण

$(y - y_1) = \tan(\theta - \alpha)(x - x_1)$ एवं

$(y - y_1) = \tan(\theta + \alpha)(x - x_1)$ है जहाँ $\tan\theta = m$.



उदाहरण # 17 : दो रेखाओं के मध्य न्यून कोण $\pi/4$ है तथा इनमें से एक की प्रवणता–1/3 है। दूसरी रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : यदि m_1 एवं m_2 प्रवणताओं वाली रेखाओं के मध्य न्यून कोण θ हो, तो $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

माना $\theta =$ एवं $m_1 = -1/3$

$$\therefore \quad \tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{-\frac{1}{3} - m_2}{1 - \frac{1}{3}m_2}\right| \quad \Rightarrow 1 = \left|\frac{3m_2 + 1}{3 - m_2}\right| \Rightarrow \frac{3m_2 + 1}{3 - m_2} = 1 \text{ या } -1$$

अब $\frac{3m_2 + 1}{3 - m_2} = 1$

$$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{1}{2} \text{ and } \frac{3m_2 + 1}{3 - m_2} = -1 \quad \Rightarrow m_2 = -2.$$

$\therefore$ दूसरी रेखा की प्रवणता या तो 1/2 या –2 है।

उदाहरण # 18 : बिन्दु (3,–2) से गुजरने वाली तथा रेखा $\sqrt{3}\,x + y = 1$. के साथ 60º का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई रेखा $\sqrt{3}\,x + y = 1$.. .....(1)

समीकरण (1) की प्रवणता $= -\sqrt{3}$.

माना अभीष्ट रेखा की प्रवणता m है। इन दोनों रेखाओं के मध्य कोण 60º है।

$$\tan 60^\circ = \left|\frac{m-\left(-\sqrt{3}\right)}{1+m\left(-\sqrt{3}\right)}\right| \Rightarrow \sqrt{3} = \left|\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}\right| \Rightarrow \frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m} = \pm\sqrt{3}$$

$$\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m} = \sqrt{3} \Rightarrow m + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 3m \Rightarrow m = 0$$

अभीष्ट रेखा का समीकरण

$y + 2 = 0$

$$\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m} = -\sqrt{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा की समीकरण $y + 2 = \sqrt{3}\,(x-3)$ है। $\Rightarrow y = \sqrt{3}\,x - 2 - 3\sqrt{3}$

अभ्यास कार्य

(19) किसी समबाहु त्रिभुज का शीर्ष (2, 3) है तथा सम्मुख भुजा का समीकरण $x + y = 2$ है। त्रिभुज की अन्य भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $(2-\sqrt{3})x - y + 2\sqrt{3} - 1 = 0$ तथा $(2+\sqrt{3})\,x - y - 2\sqrt{3} - 1 = 0$.

समान्तर रेखाएँ (Parallel Lines) :

(i) जब दो रेखाएँ समान्तर होती है तो उनकी प्रवणताएँ बराबर होती है। अतः $y = mx + c$ के समान्तर किसी रेखा का समीकरण $y = mx + d$ रूप में होता है, जहाँ d प्राचल है।

(ii) दो रेखाएँ $ax + by + c = 0$ एवं $a'x + b'y + c' = 0$ समान्तर होती है यदि $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ हो।

अतः $ax + by + c = 0$ के समान्तर कोई रेखा $ax + by + k = 0$ रूप में होती हैं, जहाँ k प्राचल है।

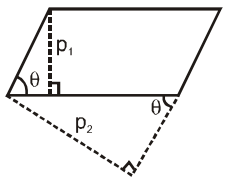
(iii) दो समान्तर रेखाओं $ax + by + c_1 = 0$ एवं

$ax + by + c_2 = 0$ के मध्य दूरी $\left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ होती है।

नोट : दोनों समीकरणों में x तथा y के गुणांक समान होने चाहिए।

(iv) किसी भी समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{p_1 p_2}{\sin\theta}$ से दिया जाता है, जहाँ p_1 एवं p_2 क्रमशः समान्तर भुजाओं के मध्य दूरियाँ है तथा θ, किन्ही दो आसन्न भुजाओं के मध्य कोण है।

नोट : चार सरल रेखाओं $y = m_1x + c_1$, $y = m_1x + c_2$ एवं $y = m_2x + d_1$, $y = m_2x + d_2$ से परिबद्ध समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\left|\frac{(c_1-c_2)(d_1-d_2)}{m_1-m_2}\right|$ के द्वारा दिया जाता है।



उदाहरण # 19 : रेखा $3x - 7y = 8$. के समान्तर उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका y-अन्तखण्ड 5 इकाई है।

हल : दी गई रेखा $3x - 7y = 8$. .....(1)

$\therefore$ (1) की प्रवणता 7/3 है।

अभीष्ट रेखा (1 के समान्तर है, अतः इसकी प्रवणता भी 7/3 है। अभीष्ट रेखा काy-अन्तखण्ड= 5

$\therefore$ $y = mx + c$ रूप से, अभीष्ट रेखा का समीकरण

$y = \frac{3}{7}x + 5$ या $3x - 7y + 35 = 0$ है।

उदाहरण # 20 : किसी वर्ग की दो भुजाएँ $5x - 12y + 6 = 0$ तथा $5x - 12y = 20$ पर स्थित है। इसका क्षेत्रफल क्या है ?

हल : स्पष्टतः वर्ग की भुजाओं की लम्बाई, उसकी समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी के बराबर होती है।

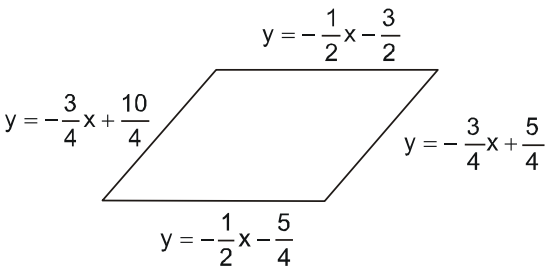
$5x - 12y + 6 = 0$.....(i) तथा $5x - 12y = 20$ .....(ii)

अब समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी

$= \frac{|6+20|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = 2$, अतः वर्ग की भुजा की लम्बाई 2 है और इसका क्षेत्रफल = 4

उदाहरण # 21 : उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ $x+2y+3=0$, $3x + 4y - 5 = 0$, $2x + 4y + 5 = 0$ एवं $3x + 4y - 10 = 0$ है।

हल :



यहाँ $c_1 = -\frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{5}{4}$, $d_1 = \frac{10}{4}$, $d_2 = \frac{5}{4}$, $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \left| \frac{\left(-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)\left(\frac{10}{4}-\frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)} \right| = \frac{5}{4}$ वर्ग इकाई

अभ्यास कार्य :

(20) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ $4x-5y+1=0$, $x-3y-6=0$, $4x - 5y - 2 = 0$ एवं $2x - 6y + 5 = 0$ है।

Ans. $\frac{51}{14}$ वर्ग इकाई

लम्बवत रेखाएँ (Perpendicular Lines) :

(i) जब m_1 एवं m_2 प्रवणाताओं की दो रेखाएँ समकोण पर होती है, तब उनकी प्रवणताओं का गुणनफल -1 होता है अर्थात $m_1 m_2 = -1$ अतः $y = mx + c$ के लम्बवत किसी रेखा का समीकरण

$y = -\frac{1}{m}x + d$ होता है, जबकि d कोई प्राचल है।

(ii) दो रेखाएँ $ax+by+c = 0$ एवं $a'x+b'y+c' = 0$ परस्पर लम्बवत होती है यदि $aa'+bb'=0$. अतः $ax + by + c = 0$ के लम्बवत किसी रेखा का समीकरण $bx - ay + k = 0$ होता है, जबकि k कोई प्राचल है।

उदाहरण # 22 : उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 4) से गुजरती है तथा रेखा $3x + 2y + 5 = 0$ के लम्बवत् है।

हल : रेखा $3x + 2y + 5 = 0$ के लम्बवत रेखा का समीकरण निम्न है

$$2x - 3y + \lambda = 0 \qquad .....(i)$$

यह, बिन्दु (3, 4) से गुजरती है।

$\therefore \quad 3 \times 2 - 3 \times 4 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 6$

(i) में $\lambda = 6$ रखने पर

$2x - 3y + 6 = 0$ जो कि अभीष्ट समीकरण है।

अन्य विधि :– दी गई रेखा की प्रवणता –3/2 है। चूँकि अभीष्ट रेखा दी गई रेखा के लम्बवत है। अतः अभीष्ट रेखा की प्रवणता 2/3 है। यह बिन्दु (3, 4) से गुजरती है। अतः इसकी समीकरण

$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 3)$ या $2x - 3y + 6 = 0$ हैं।

अभ्यास कार्य :

(21) एक त्रिभुज के शीर्ष A(10, 4), B (–4, 9) एवं C(–2, –1) हैं। इसके शीर्षो से भुजाओं पर डाले गये लम्बों की समीकरणें ज्ञात कीजिए। इसका लम्बकेन्द्र भी ज्ञात कीजिए।

Ans. $x - 5y + 10 = 0,\ 12x + 5y + 3 = 0,\ 14x - 5y + 23 = 0,\ \left(-1, \frac{9}{5}\right)$

रेखा $ax + by + c = 0$ के सापेक्ष बिन्दु (x_1, y_1) की स्थिति :
(Position of the point (x_1, y_1) relative to the line $ax + by + c = 0$)

यदि $ax_1 + by_1 + c$ का चिन्ह c के चिन्ह के समान हो, तो बिन्दु (x_1, y_1) रेखा $ax + by + c = 0$ के सापेक्ष उस ओर स्थित होता है जिस ओर मूल बिन्दु स्थित होता है। लेकिन यदि $ax_1 + by_1 + c$ का चिन्ह c के चिन्ह के विपरित हो, तो बिन्दु (x_1, y_1) रेखा से मूल बिन्दु के दूसरी तरफ होगा।

व्यापक रूप में दो बिन्दु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) रेखा $ax + by + c = 0$ के एक ही और स्थित होगें यदि $ax_2 + by_2 + c$ तथा $ax_1 + by_1 + c$, समान चिन्ह के हो तथा परस्पर रेखा के विपरीत ओर होगें यदि $ax_2 + by_2 + c$ तथा $ax_1 + by_1 + c$ परस्पर विपरित चिन्ह के हों।

उदाहरण # 23 : प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु (2, –1) एवं (–3, 3) रेखा $2x - 3y + 5 = 0$ के विपरित ओर स्थित है।

हल : (2, –1) पर, $2x - 3y + 5$ का मान $= 4 + 3 + 5 = 12 > 0$

(–3, 3) पर, $2x - 3y + 5$ का मान $= -6 - 9 + 5 = -10 < 0$

$\therefore$ बिन्दु (2, –1) एवं (–3, 3) रेखा के विपरित ओर स्थित है।

अभ्यास कार्य :

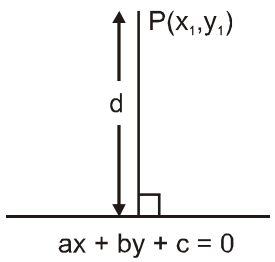
(22) बिन्दु (3, – 4) और (2, 6) सरल रेखा $3x - 4y = 8$ के एक ही ओर स्थित हैं या विपरीत ?

(23) (1, 1), (–1, 2) एवं (2, 3) में से कौनसा एक रेखा $4x + 3y - 5 = 0$ के उस तरफ स्थित है जिस तरफ मूल बिन्दु स्थित है?

Ans. (22) विपरीत ओर (23) (–1, 2)

किसी बिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई (Length of perpendicular from a point to a line) :

बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से सरल $ax + by + c = 0$ पर लम्ब की लम्बाई $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ द्वारा दी जाती है।



उदाहरण # 24 : बिन्दु (–2, 3) तथा रेखा $4x - 3y + 8 = 0$ के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट दूरी $= \left|\dfrac{(-2)\times 4 - 3\times 3 + 8}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \dfrac{9}{5}$

उदाहरण # 25 : रेखा $x - y + 2 = 0$ पर उन सभी बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जो रेखा $12x - 5y + 9 = 0$.से इकाई दूरी पर स्थित है।

हल ध्यान रहे कि रेखा $x - y + 2 = 0$ पर किसी स्वेच्छिक बिन्दु के निर्देशांक $x = t$ (या $y = t$) रखकर ज्ञात किए जा सकते है तथा फिर रेखा की समीकरण से y (या x) ज्ञात करते है, जहाँ t प्राचल है। रेखा की दी गई समीकरण में $x = t$ रखकर हम $y = 2 + t$ ज्ञात करते है, अतः दी गई रेखा पर स्वेच्छ बिन्दु के निर्देशांक $P(t, 2 + t)$ है। माना $P(t, 2 + t)$ अभीष्ट बिन्दु है। तब P की रेखा $12x - 5y + 9 = 0$ से दूरी इकाई है अर्थात्

$\Rightarrow \left|\dfrac{12t - 5(t+2) + 9}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad |7t - 1| = 13$

$\Rightarrow 7t - 1 = \pm 13 \quad \Rightarrow \quad t = 2$ or $t = -12/7$

अतः अभीष्ट बिन्दु (2,4) या (–12/7,2/7) होगें।

अभ्यास कार्य :

(24) त्रिभुज के शीर्षो (–1, 1), (5, 2) एवं (3, –1) से सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्बों की लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए।

Ans. $\dfrac{16}{\sqrt{13}}, \dfrac{8}{\sqrt{5}}, \dfrac{16}{\sqrt{37}}$

लम्बपाद के निर्देशांक तथा रेखा के सापेक्ष बिन्दु का प्रतिबिम्ब (Foot of perpendicular and image of a point about a line) :

(i) किसी बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c = 0$ पर लम्ब का पाद $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = -\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$ से दिया जाता हैं।

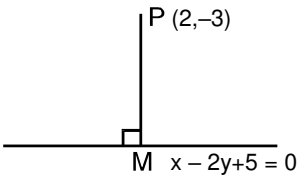
(ii) रेखा $ax+by+ c = 0$ के सापेक्ष बिन्दु (x_1, y_1) का प्रतिबिम्ब $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = -2\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$ से दिया जाता हैं।

उदाहरण # 26 : बिन्दु P (2, –3) से रेखा $x - 2y + 5 = 0$ पर डाले गए लम्ब के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : PM की प्रवणता = – 2

$\therefore$ PM की समीकरण

$2x + y = 1$ .....(i)



समीकरण (i) एवं $x - 2y + 5 = 0$ को हल करने पर M के निर्देशांक (–3/5, 11/5) प्राप्त होते है।

अन्य विधि: यहाँ $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = -\dfrac{2+6+5}{1+4} \Rightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = -\dfrac{13}{5} \Rightarrow x = -3/5$, $y = 11/5$

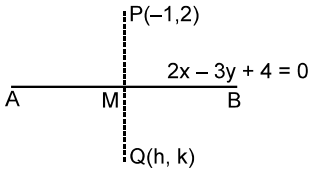
उदाहरण # 27 : रेखा दर्पण $2x - 3y + 4 = 0$ में बिन्दु P(–1, 2) का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

हल : माना P का प्रतिबिम्ब Q है

$\therefore$ PM = MQ एवं $PQ \perp AB$

माना Q के निर्देशांक (h, k) है।

$\therefore$ M के निर्देशांक $\left(\dfrac{h-1}{2}, \dfrac{k+2}{2}\right)$ हैं।



यह रेखा $2x - 3y + 4 = 0$ पर स्थित है।

$\therefore \quad 2\left(\frac{h-1}{2}\right) - 3\left(\frac{k+2}{2}\right) + 4 = 0.$

या $\quad 2h - 3k = 0 \quad$ .....(i)

PQ की प्रवणता $= \frac{k-2}{h+1}$

$PQ \perp AB$

$\therefore \quad \frac{k-2}{h+1} \times \frac{2}{3} = -1. \quad \Rightarrow \quad 3h + 2k - 1 = 0.$ .....(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) को हल करने पर $h = \frac{3}{13}, k = \frac{2}{13}$

$\therefore \quad P(-1, 2)$ का प्रतिबिम्ब $Q\left(\frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$ है।

अन्य विधि : बिन्दु P (– 1, 2) का रेखा $2x - 3y + 4 = 0$ के सापेक्ष प्रतिबिम्ब हेतु

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = -2\,\frac{[2(-1)-3(2)+4]}{2^2+(-3)^2}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{8}{13} \quad \Rightarrow \quad 13x + 13 = 16 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{13}$$

$$\& \; 13y - 26 = -24 \Rightarrow \quad y = \frac{2}{13} \quad \therefore \quad \text{प्रतिबिम्ब}\left(\frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$$

अभ्यास कार्य :

(25) बिन्दु (– 2, – 3) से रेखा $3x - 2y - 1 = 0$ पर डाले गए लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(26) बिन्दु (1, 2) का y-अक्ष के सापेक्ष प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

Ans. (25) $\left(\frac{-23}{13}, \frac{-41}{13}\right)$ (26) (– 1, 2)

केन्द्रक, अन्तःकेन्द्र एवं बहिष्केन्द्र : (Centroid, Incentre & Excentre)

यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ एवं $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष है जिसकी भुजाओं BC, CA, AB की लम्बाईयाँ क्रमशः a, b, c है, तो त्रिभुज ABC से सम्बन्धित कुछ विशेष बिन्दुओं के निर्देशांक निम्न प्रकार होंगे –

केन्द्रक $G \equiv \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

अन्तःकेन्द्र $I \equiv \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

बहिष्केन्द्र (शीर्ष A के सापेक्ष) $I_1 \equiv \left(\frac{-ax_1+bx_2+cx_3}{-a+b+c}, \frac{-ay_1+by_2+cy_3}{-a+b+c}\right)$

और इसी प्रकार से शीर्ष B एवं C के सापेक्ष भी परिकेन्द्र के निर्देशांक लिखे जा सकते है।

नोट :

(i) अन्तःकेन्द्र, कोण अर्द्धकों को $(b+c) : a$; $(c+a) : b$ एवं $(a+b) : c$ अनुपात में विभाजित करता है।

(ii) अन्तःकेन्द्र एवं बहिष्केन्द्र जिस कोण अर्द्धक पर स्थित है, उसके सापेक्ष एक दूसरे के हरात्मक संयुग्मी होते हैं।

(iii) लम्बकेन्द्र, केन्द्रक एवं परिकेन्द्र सदैव संरेखीय होते है तथा लम्बकेन्द्र एवं परिकेन्द्र को मिलाने वाली रेखा को केन्द्रक 2 : 1 अनुपात में विभाजित करता है।

(iv) समद्विबाहु त्रिभुज में G, O, I एवं C एक ही रेखा पर स्थित होते है तथा समबाहु त्रिभुज में ये सभी चारों बिन्दु संपाती होते है।

(v) एक समकोण त्रिभुज में लम्बकेन्द्र समकोणीय शीर्ष पर होता है तथा परिकेन्द्र कर्ण का मध्य बिन्दु होता है।

(vi) अधिक कोण त्रिभुज की स्थिति में परिकेन्द्र तथा लम्बकेन्द्र दोनों त्रिभुज के बाहर स्थित होते हैं।

उदाहरण # 28 : त्रिभुज के (i) केन्द्रक (ii) अन्तःकेन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (0, 0), (5, 0) एवं (0, 12) है।

हल : (i) हम जानते है कि त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक जिसके कोणीय बिन्दु (x_1, y_1), (x_2, y_2) एवं (x_3, y_3) हैं, $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ द्वारा दिये जाते है।

अतः त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक जिसके शीर्ष (0, 0), (5, 0) एवं (0, 12) है,

$\left(\frac{0+5+0}{3}, \frac{0+0+12}{3}\right)$ या $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$ होगें

(ii) माना A (0, 0), B (5, 0) एवं C(0, 12) त्रिभुज ABC के शीर्ष है।

तब c = AB = 5, b = CA = 12

एवं a = BC = 13.

अन्तःकेन्द्र के निर्देशांक $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$ द्वारा दिये जाते है।

अतः $\left(\frac{13\times0+12\times5+5\times0}{5+12+13}, \frac{13\times0+12\times0+5\times12}{5+12+13}\right)$ या (2, 2)

अभ्यास कार्य :

(27) त्रिभुज के दो शीर्ष (3, –5) एवं (–7, 4) है, यदि केन्द्रक (2, –1) है, तो तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

(28) त्रिभुज के अन्दर बनाये गए एक वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–36, 7), (20, 7) एवं (0, –8) है।

Ans. (27) (10, – 2) (28) (–1, 0)

दो रेखाओं के मध्य कोणों के अर्धक (Bisectors of the angles between two lines) :

दो रेखाओं $ax + by + c = 0$ तथा $a'x + b'y + c' = 0$ $(ab' \neq a'b)$ के मध्य कोणों के समद्विभाजकों की समीकरणें $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$ होती है।

नोट : रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से समान कोण पर झुकी हुई तथा बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से गुजरने वाली रेखाओं की समीकरण वही होती है जो उन दोनों रेखाओं के मध्य समद्विभाजकों के समान्तर तथा बिन्दु P से गुजरने वाली रेखाओं की होती है।

उदाहरण # 29 : दो रेखाओं $3x + y + 1 = 0$ तथा $x + 3y + 1 = 0$ के मध्य कोणों के अर्धकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : रेखाओं $3x + y + 1 = 0$ एवं $x + 3y + 1 = 0$ के मध्य कोणों के अर्धकों की समीकरण निम्न होती है

$$\frac{3x+y+1}{\sqrt{3^2+1^2}} = \pm\frac{x+3y+1}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

या $3x + y + 1 = \pm(x + 3y + 1)$

धनात्मक चिन्ह लेने पर एक अर्धक $x = y$

तथा ऋणात्मक चिन्ह लेने पर एक अर्धक $2x + 2y + 1 = 0$ प्राप्त होगा।

अभ्यास कार्य :

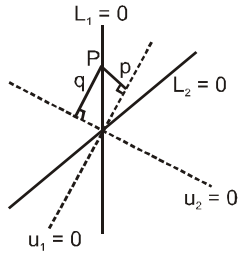
(29) रेखा युग्म $3x + 4y + 13 = 0$ तथा $12x - 5y + 32 = 0$ के मध्य कोणों के अर्द्धकों की समीकरणें ज्ञात कीजिए।

Ans. $21x - 77y - 9 = 0$ एवं $99x + 27y + 329 = 0$

न्यूनकोण अर्धक एवं अधिक–कोण अर्धक में विभेद करने की विधियाँ :
(Methods to discriminate between the acute angle bisector & the obtuse angle bisector)

(i) यदि दो रेखाओं में से कोई एक रेखा तथा एक अर्धक के मध्य का कोण θ हो, तो $\tan\theta$ का मान ज्ञात करते है।
यदि $|\tan\theta| < 1$ हो, तो $2\theta < 90°$ अतः यह अर्धक न्यून कोण अर्धक होता है।
यदि $|\tan\theta| > 1$ हो, तो यह अर्धक अधिक कोण अर्धक होता है।

(ii) माना दी गई रेखाएँ $L_1 = 0$ एवं $L_2 = 0$ है तथा $u_1 = 0$ एवं $u_2 = 0$ रेखा $L_1 = 0$ एवं $L_2 = 0$ के मध्य कोणों के अर्धक है। किसी एक रेखा $L_1 = 0$ या $L_2 = 0$ पर बिन्दु P लेकर $u_1 = 0$ या $u_2 = 0$ पर लम्ब डालते है। यदि–
$|p| < |q| \Rightarrow u_1$ न्यून कोण अर्धक है।
$|p| > |q| \Rightarrow u_1$ अधिक कोण अर्धक है।
$|p| = |q| \Rightarrow$ रेखाएँ L_1 एवं L_2 परस्पर लम्बवत् है।



(iii) यदि $aa' + bb' < 0$ हो, तो न्यूनकोण अर्धक की समीकरण $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = +\dfrac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$ होती है। परन्तु यदि $aa' + bb' > 0$ हो, तो अधिक कोण अर्धक की समीकरण $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = +\dfrac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$ होती है।

उदाहरण # 30 : रेखाओं $2x - y + 1 = 0$ एवं $x - 2y - 2 = 0$ के लिए निम्नलिखित समीकरण ज्ञात कीजिए–
(i) इनके मध्य अधिक कोण का अर्धक
(ii) इनके मध्य न्यून कोण का अर्धक

हल : $2x - y + 1 = 0$ .....(1)
एवं $x - 2y - 2 = 0$ .....(2)
यहाँ $a_1 = 2, a_2 = 1, b_1 = -1, b_2 = -2$
अब $a_1a_2 + b_1b_2 = 4 > 0$

$\therefore$ रेखाओं (1) एवं (2) के मध्य अधिक कोण के अर्द्धक की समीकरण $\dfrac{2x-y+1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{x-2y-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$ होगी।
या $x + y + 3 = 0$
तथा न्यून कोण के अर्द्धक की समीकरण निम्न होगी
$$\frac{2x-y+1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$
या $3x - 3y = 1$

अभ्यास कार्य :

(30) रेखाओं $x + y - 3 = 0$ एवं $7x - y + 5 = 0$ के मध्य कोण के अर्द्धकों की समीकरण ज्ञात कीजिए तथा बताइए कि इनमें से कौन रेखाओं के मध्य न्यून कोण को समद्विभाजित करता है।

Ans. $x - 3y + 10 = 0$ (अधिक कोण अर्द्धक); $6x + 2y - 5 = 0$ (न्यून कोण अर्द्धक)

तीन सरल रेखाओं के संगामी होने का प्रतिबन्ध (Condition of Concurrency) :

तीन रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ एवं $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ संगामी होती है यदि $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ हो

वैकल्पिक विधि : यदि तीन अचर A, B एवं C (सभी शून्य नहीं है) इस प्रकार ज्ञात किए जा सकते है कि $A(a_1x + b_1y + c_1) + B(a_2x + b_2y + c_2) + C(a_3x + b_3y + c_3) \equiv 0$ हो, तो तीनों रेखाएँ संगामी होती है।

उदाहरण # 31 : सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $x + 2y = 9$, $3x + 5y = 5$ एवं $ax - by = 1$ संगामी होती है।

हल : दी गई रेखाएँ

$x + 2y = 9$ .....(1)

$3x + 5y = 5$ .....(2)

एवं $ax - by = 1$ .....(3)

रेखाऐं संगामी होगी यदि $\Delta = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 3 & 5 & -5 \\ a & -b & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 35a + 22b = -1$$

अभ्यास कार्य :

(31) m का मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए रेखाएँ $4x - 3y + 2 = 0$, $3x + 4y - 4 = 0$ एवं $x + my + 6 = 0$ संगामीहैं।

Ans. –7

रेखा निकाय (Family Of Straight Lines)

रेखाएँ $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखाओं के निकाय का समीकरण $L_1 + k\,L_2 = 0$ होता है, अर्थात

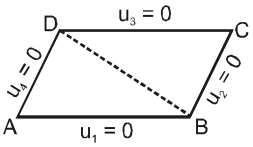
$(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, जहाँ k स्वेच्छ वास्तविक संख्या है।

नोट : (i) यदि $u_1 = ax + by + c$, $u_2 = a'x + b'y + d$, $u_3 = ax + by + c'$

$u_4 = a'x + b'y + d'$ हो, तो

$u_1 = 0; u_2 = 0; u_3 = 0; u_4 = 0$ एक समान्तर चतुर्भुज का निर्माण करते है।

विकर्ण BD का समीकरण $u_2u_3 - u_1u_4 = 0$ होता है।



(ii) विकर्ण AC का समीकरण $u_1 + \lambda u_4 = 0$ तथा

$u_2 + \mu u_3 = 0$ होता है, यदि λ तथा μ. के कुछ वास्तविक मानों के लिए दोनों समीकरणें एक समान हो।

[λ एवं μ के मान ज्ञात करने के लिए x, y के गुणांकों एवं अचर पदों की तुलना करते है।].

उदाहरण # 32 : यदि $3a + 2b + 5c = 0$ तथा रेखा निकाय $ax + by + c = 0$ एक स्थिर बिन्दु से गुजरती है तो स्थिर बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल : $3a + 2b + 5c = 0$ ..... (i)

$ax + by + c = 0$ ..... (ii)

c, को विलुप्त करने पर, हमे प्राप्त होता है

$$ax + by - \frac{1}{5}(3a + 2b) = 0 \Rightarrow a\left(x - \frac{3}{5}\right) + b\left(y - \frac{2}{5}\right) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right) + \frac{b}{a}\left(y - \frac{2}{5}\right) = 0$$

यह $L_1 + \lambda L_2 = 0$ के रूप का है

जो कि $L_1 = 0$ तथा $L_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ से गुजरती है (a तथा b के सभी वास्तविक मानों के लिए)

Aliter : $3a + 2b + 5c = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b + c = 0$

$\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ रेखा $ax + by + c = 0$ पर स्थित है अतः स्थिर $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ बिन्दु है

उदाहरण # 33 : रेखाओं $3x + 7y = 17$ एवं $x + 2y = 5$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली तथा सरल रेखा $3x + 4y = 10$ के लम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए –

हल : दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाले रेखा निकाय का समीकरण निम्न प्रकार है–

$(x + 2y - 5) + \lambda (3x + 7y - 17) = 0$

या $x (3\lambda + 1) + y (7\lambda + 2) - 17\lambda - 5 = 0$ .....(i)

यह सरल रेखा $3x + 4y = 10$ के लम्बवत् है

$$\therefore \left(-\frac{3\lambda+1}{7\lambda+2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{11}{37}$$

λ का यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$4x - 3y + 2 = 0$

अभ्यास कार्य :

(32) रेखाओं $x - 3y + 1 = 0$ एवं $2x + 5y - 9 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली उन सरल रेखाओं की समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी मूल बिन्दु से दूरी $\sqrt{5}$ हैं।

Ans. $2x + y - 5 = 0$

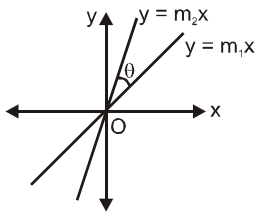
मूल बिन्दु से गुजरने वाले रेखा युग्म का समीकरण
(A Pair of straight lines through origin) :

(i) दो घात का समघात समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ सदैव मूल बिन्दु से गुजरने वाले रेखा युग्म को प्रदर्शित करता है यदि :

(a) $h^2 > ab \Rightarrow$ रेखाएँ वास्तविक तथा भिन्न होगी।

(b) $h^2 = ab \Rightarrow$ रेखाएँ संपाती होगी।

(c) $h^2 < ab \Rightarrow$ रेखाएँ काल्पनिक है जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु वास्तविक होगा अर्थात् (0, 0)



(ii) यदि समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा निरूपित दो रेखाएं $y = m_1x$ एवं $y = m_2x$ हो, तो

$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ एवं $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$.

(iii) यदि सरल रेखा युग्म $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ के मध्य न्यून कोण θ हो, तो $\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$.

(iv) रेखाओं के लिए प्रतिबन्ध :

(a) दोनों एक दूसरे से समकोण पर होगी यदि $a + b = 0$. अर्थात् x^2 का गुणांक + y^2 का गुणांक = 0

(b) रेखाएँ संपाती होगी यदि $h^2 = ab$.

(c) x अक्ष से समान कोण पर झुकी होगी यदि $h = 0$ अर्थात् xy का गुणांक = 0

नोट : एक n घात का समघात समीकरण मूल बिन्दु से जाने वाली n सरल रेखाओं को प्रदर्शित करता है।

(v) दो सरल रेखाओं $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ के मध्य कोण को समद्विभाजित करने वाले रेखा युग्म का समीकरण $\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$ है।

उदाहरण # 34 : प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $18x^2 - 9xy + y^2 = 0$ भिन्न–भिन्न सरल रेखाओं के युग्म को प्रदर्शित करता है तथा प्रत्येक रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है। इन रेखाओं की अलग–अलग समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई समीकरण दो घात की समघात समीकरण है। अतः यह मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखाओं के युग्म को प्रदर्शित करता है। दी गई समीकरण की $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ से तुलना करने पर $a = 18, b = 1$ और $2h = -9$.

$\therefore h^2 - ab = \frac{81}{4} - 18 = \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow h^2 > ab$

अतः दी गई समीकरण मूल बिन्दु से जाने वाली भिन्न रेखा युग्म प्रदर्शित करता है।

अब, $18x^2 - 9xy + y^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{x}\right) + 18 = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} - 6\right)\left(\frac{y}{x} - 3\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} - 6 = 0$ or $\frac{y}{x} - 3 = 0 \Rightarrow y - 6x = 0$ or $y - 3x = 0$

अतः दी गई समीकरण मूल बिन्दु से जाने वाली दो भिन्न–भिन्न रेखाओं के रेखा युग्म को प्रदर्शित करता है।
$y - 3x = 0$ एवं $y - 6x = 0$

उदाहरण # 35 : मूल बिन्दु से जाने वाले रेखा युग्म की समीकरण ज्ञात कीजिए जो समीकरण $6x^2 - xy - 12y^2 = 0$ से निरूपित रेखाओं के लम्बवत् है।

हल : $6x^2 - xy - 12y^2 = 0$.

$\Rightarrow \quad 6x^2 - 9xy + 8xy - 12y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x + 4y)(2x - 3y) = 0$

$\Rightarrow \quad 3x + 4y = 0$ & $2x - 3y = 0$

अतः दी गई समीकरण रेखाओं $3x + 4y = 0$ एवं $2x - 3y = 0$ को प्रदर्शित करती है।
अतः मूल बिन्दु से जाने वाली तथा दी गई रेखाओं के लम्बवत् रेखाएँ
$4x - 3y = 0$ तथा $3x + 2y = 0$
$\Rightarrow$ इनका संयुक्त समीकरण $12x^2 - xy - 6y^2 = 0 = 0$

उदाहरण # 36 : रेखा युग्म $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई समीकरण $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$
यहाँ $a = x^2$ का गुणांक $= 1$, $b = y^2$ का गुणांक $= 2$

$2h = xy$ का गुणांक $= -3 \quad \therefore h = -\frac{3}{2}$

अब $\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{1 + 2}\right| = \frac{1}{3}$

जहाँ θ रेखाओं के मध्य न्यून कोण है।

$\therefore$ रेखाओं के मध्य न्यून कोण $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ एवं इनके मध्य अधिक कोण $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ है।

उदाहरण # 37 : रेखाओं $3x^2 - 5xy + y^2 = 0$ के मध्य कोण के अर्द्धकों की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई समीकरण $3x^2 - 5xy + y^2 = 0$ .....(1)
इसकी तुलना समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ से करने पर .....(2)
$a = 3, 2h = -5$; एवं $b = 4$

अब रेखा युग्म (1) के मध्य कोण के अर्द्धकों की समीकरण $\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$ है।

या $\frac{x^2 - y^2}{3 - 4} = \frac{xy}{-\frac{5}{2}}$; या $\frac{x^2 - y^2}{-1} = \frac{2xy}{-5}$ या $5x^2 - 2xy - 5y^2 = 0$

अभ्यास कार्य :

(33) रेखाओं $y^2 - 9xy + 18x^2 = 0$ एवं $y = 9$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(34) यदि रेखा युग्म $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ एवं $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ इस प्रकार है कि प्रत्येक युग्म अन्य युग्म के मध्य कोण को समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि $pq = -1$.

Ans. (33) $\frac{27}{4}$ वर्ग इकाई।

सरल रेखा युग्म को प्रदर्शित करने वाला व्यापक द्विघात समीकरण :
(General equation of second degree representing a pair of Straight lines) :

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ एक रेखा युग्म को प्रदर्शित करता है यदि :

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ अर्थात् यदि $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$. इस प्रकार समीकरण

(ii) व्यापक समीकरण द्वारा प्रदर्शित दो सरल रेखाओं के मध्य कोण θ वही होता है जो उसके समघात भाग द्वारा प्रदर्शित दो सरल रेखाओं के मध्य होता है।

उदाहरण # 38 : सिद्ध कीजिए कि समीकरण $6x^2 + 13xy + 6y^2 + 8x + 7y + 2 = 0$ एक रेखा युग्म को प्रदर्शित करता है। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई समीकरण $6x^2 + 13xy + 6y^2 + 8x + 7y + 2 = 0$ .....(1)

समीकरण (1) को x में द्विघात समीकरण लिखने पर $6x^2 + (13y + 8)x + 6y^2 + 7y + 2 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-(13y+8) \pm \sqrt{(13y+8)^2 - 4.6(6y^2+7y+2)}}{12}$$

$$= \frac{-(13y+8) \pm \sqrt{169y^2 + 208y + 64 - 144y^2 - 168y - 48}}{12}$$

$$= \frac{-(13y+8) \pm \sqrt{25y^2 + 40y + 16}}{12} = \frac{-(13y+8) \pm (5y+4)}{12}$$

$\Rightarrow$ $12x = -13y - 8 + 5y + 4$ या $12x = -13y - 8 - 5y - 4$

$\Rightarrow$ $3x + 2y + 1 = 0$ या $2x + 3y + 2 = 0$

अतः समीकरण (1) रेखाओं के युग्म को प्रदर्शित करता है जिनकी समीकरण

$3x + 2y + 1 = 0$ .....(1)

एवं $2x + 3y + 2 = 0$.....(2)

इन दो समीकरणों को हल करने पर अभीष्ट प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\right)$ है।

अभ्यास कार्य :

(35) समीकरण $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाओं के समान्तर एवं बिन्दु (1,1) से गुजरने वाली सरल रेखाओं की संयुक्त समीकरण ज्ञात कीजिए एवं इनके मध्य कोण भी ज्ञात कीजिए।

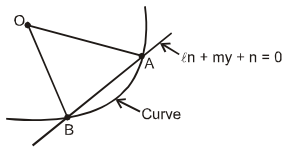
Ans. $x^2 - 5xy + 4y^2 + 3x - 3y = 0$, $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

समघातीयकरण (Homogenization) :

द्विघात वक्र $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ एवं सरल रेखा $L \equiv \ell x + my + n = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाले सरल रेखा युग्म का समीकरण

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx\left(\frac{\ell x + my}{-n}\right) + 2fy\left(\frac{\ell x + my}{-n}\right) + c\left(\frac{\ell x + my}{-n}\right)^2 = 0 \text{ होता है।}$$

वक्र के समीकरण को सरल रेखा के समीकरण की सहायता से समघात बनाकर समीकरण ज्ञात करते है।



नोट: दो वक्रों $C_1 = 0$ एवं $C_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले किसी वक्र की समीकरण $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ होती है, जहाँ λ एवं μ प्राचल है।

उदाहरण # 39 : वक्र $2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y = 0$ की सभी जीवाऐं जो कि मूल बिन्दु पर समकोण बनाती है, एक स्थिर बिन्दु से गुजरती है तो स्थिर बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना वक्र की जीवा का समीकरण $Ax + By = 1$ है।

तथा दिये गये वक्र का समीकरण $2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y = 0$ है।

वक्र के समीकरण $2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y = 0$ को जीवा $Ax + By = 1$ की मदद से x, y में समघातीयकरण करने पर

$2x^2 - 3y^2 + 4x(Ax + By) - 2y(Ax + By) = 0$

$x^2(2 + 4A) + y^2(-3 - 2B) + xy(4B - 2A) = 0$ ...(i)

समीकरण (i) से निरूपित सरल रेखाऐं परस्पर लम्बवत् है। अतः

x^2 का गुणांक + y^2 कागुणांक = 0

$\Rightarrow$ $2 + 4A + (-3 - 2B) = 0$

$4A - 2B = 1$

जीवा $Ax + By = 1 \Rightarrow x = 4$ $y = -2 \Rightarrow$ स्थिर बिन्दु $(4, -2)$

अभ्यास कार्य :

(36) सरल रेखा $3x + 4y - 5 = 0$ एवं वक्र $2x^2 + 3y^2 = 5$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली सरल रेखाओं का संयुक्त समीकरण ज्ञात कीजिए।

(37) सरल रेखा $lx + my + n = 0$ एवं वक्र $y^2 = 4ax$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली सरल रेखाओं का संयुक्त समीकरण ज्ञात कीजिए। इनके लम्बवत् होने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

Ans. (36) $x^2 - y^2 - 24xy = 0$ (37) $4alx^2 + 4amxy + ny^2 = 0$; $4al + n = 0$

Exercise-1

✍ **Marked Questions may have for Revision Questions.**
✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

Section (A): Distance formula, section formula, Area of Triangle & polygon, Collinearity, slope

खण्ड (A): दुरी सूत्र, विभाजन सूत्र, त्रिभुज का क्षेत्रफल, बहुपद, संरेखीयता, प्रवणता

A-1.(i) Prove that the points (2a, 4a), (2a, 6a) and $(2a + \sqrt{3}a, 5a)$ are the vertices of an equilateral triangle whose side is 2a.
सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2a, 4a), (2a, 6a) एवं $(2a + \sqrt{3}a, 5a)$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष है जिसकी भुजा 2a है।
(ii) Find the points which trisect the line segment joining the points (0, 0) and (9, 12).
बिन्दुओं (0, 0) एवं (9, 12) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक हैं –
Ans. **(ii) (3, 4) (6, 8)**

A-2. **(i)** In what ratio does the point $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ divide the line segment joining the points (3, 5) and (– 7, 9) ?
बिन्दुओं (3,5) एवं (–7,9) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ किस अनुपात में विभाजित करता हैं ?
(ii) In which ratio P(2a – 2, 4a – 6)) divides Q (2a – 3, 3a – 7) and R(2a, 6a – 4).
बिन्दुओं Q (2a – 3, 3a – 7) और R(2a, 6a – 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु P(2a – 2, 4a – 6) किस अनुपात में विभाजित करता हैं ?
Ans. **(i)** 1:3 internally आन्तरिक **(ii)** 1:2

A-3. (i) Find the value of λ such that points P(1, 2), Q(– 2, 3) and R(λ + 1, λ) are not forming a triangle ?
λ का मान ज्ञात कीजिए जब कि बिन्दु P(1, 2), Q(– 2, 3) तथा R(λ + 1, λ) एक त्रिभुज नहीं बनाती है ?
(ii) Find the ratio in which the line segment joining of the points (1, 2) and (– 2, 3) is divided by the line 3x + 4y = 7
(1, 2) तथा (– 2, 3) को मिलाने वाले रेखा खण्ड को सरल रेखा 3x + 4y = 7 जिस अनुपात में विभाजित करती है, वह अनुपात ज्ञात कीजिये।
(iii)✍ Find the harmonic conjugate of the point R (5, 1) with respect to points P (2, 10) and Q (6, – 2).
बिंदुओं P (2, 10) तथा Q (6, –2) के सापेक्ष बिंदु R(5, 1) का हरात्मक संयुग्मी ज्ञात कीजिये।
Ans. **(i)** $\frac{3}{2}$ **(ii)** 4 : 1 internally (अंतः विभाजन) **(iii)** (8, – 8).

A-4. A and B are the points (3, 4) and (5, – 2) respectively. Find the co-ordinates of a point P such that PA = PB and the area of the triangle PAB = 10.
बिन्दु A एवं B क्रमशः (3, 4) एवं (5, – 2) है। बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जबकि PA = PB एवं त्रिभुज PAB का क्षेत्रफल 10 वर्ग इकाई है।
Ans. (7, 2) or या (1, 0)

A-5. Find the area of the quadrilateral with vertices as the points given in each of the following :
निम्नलिखित शीर्षों वाले चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
(i) (0, 0), (4, 3), (6, 0), (0, 3) (ii) (0, 0), (a, 0), (a, b), (0, b)

Ans. (i) 15 वर्ग इकाई (ii) |ab| वर्ग इकाई

Section (B) : Different forms of straight lines and Angle between lines
खण्ड (B) : त्रिभुज और बहुभुज का क्षेत्रफल, सरल रेखाओं के विभिन्न रूप और रेखाओं के मध्य कोण

B-1. Reduce $x + \sqrt{3}\ y + 4 = 0$ to the :
(i) Slope intercepts form and find its slope and y-intercept.
(ii) Intercepts form and find its intercepts on the axes.
(iii) Normal form and find values of P and α .
रेखा $x + \sqrt{3}\ y + 4 = 0$ को
(i) प्रवणता–अंतःखण्ड रूप में परिवर्तित करो तथा इसकी प्रवणता व y-अंतःखण्ड ज्ञात कीजिए।
(ii) अंतःखण्ड रूप में परिवर्तित करो तथा इसके अक्षों पर अंतःखण्ड भी ज्ञात कीजिए।
(iii) अभिलम्ब रूप में परिवर्तित करो तथा इसके लिये P व α के मान ज्ञात कीजिए।

Ans. (i) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ x - \frac{4}{\sqrt{3}}$, slope ढाल $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$, y-intercept अंतःखण्ड $= -\frac{4}{\sqrt{3}}$
(ii) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-4/\sqrt{3}} = 1$, x-intercept अंतःखण्ड $= -4$, y-intercept अंतःखण्ड $= -\frac{4}{\sqrt{3}}$
(iii) $x \cos 240^\circ + y \sin 240^\circ = 2$, $P = 2$, $\alpha = 240^\circ$

B-2. Find number of straight line passing through (2, 4) and forming a triangle of 16 sq. cm with the coordinate axis.
सरल रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो (2, 4) से गुजरती है तथा निर्देशांक अक्षों के साथ 16 वर्ग सेमी का त्रिभुज बनाती है।

Ans. 3

B-3. Find the equation of the straight line that passes through the point A(– 5, – 4) and is such that the portion intercepted between the axes is divided by the point A in the ratio 1 : 2 (internally).
बिन्दु A (– 5, – 4) से गुजरने वाली तथा इस बिन्दु A पर अक्षों के मध्य 1 : 2 (आन्तरिक) में विभाजित करने वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
Ans. $8x + 5y + 60 = 0$, $2x + 5y + 30 = 0$

B-4. The co-ordinates of the mid-points of the sides of a triangle are (2, 1), (5, 3) and (3, 7). Find the length and equation of its sides.
त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (2, 1), (5, 3) एवं (3, 7) हैं। इसकी भुजाओं के समीकरण तथा लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए।
Ans. Equations are $2x - 3y + 15 = 0$, $2x + y - 5 = 0$, $6x - y - 27 = 0$

Length of sides are $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{5}$, $2\sqrt{37}$

B-5. Find the straight line cutting an intercept of one unit on negative x-axis and inclined at 45° (in anticlockwise direction) with positive direction of x-axis
उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो ऋणात्मक x-अक्ष पर एक इकाई का अन्तखण्ड काटती है तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा से 45° का वामावर्त दिशा में कोण बनाती है
Ans. $x - y + 1 = 0$

B-6. Through the point P(4, 1) a line is drawn to meet the line $3x - y = 0$ at Q where $PQ = \frac{11}{2\sqrt{2}}$. Determine the equation of line.
बिन्दु P(4, 1) से एक रेखा इस प्रकार खींची जाती है कि यह रेखा $3x - y = 0$ को बिन्दु Q पर मिलती है जहाँ $PQ = \frac{11}{2\sqrt{2}}$. इस रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

Ans. $x + y = 5, x - 7y + 3 = 0$

B-7. A line having slope '1' is drawn from a point A(–3, 0) cuts a curve $y = x^2 + x + 1$ at P & Q. Find $\ell(AP)\ \ell(AQ)$.

एक सरल रेखा जिसकी प्रवणता '1' है, बिन्दु A(–3, 0) से खीचीं जाती है जो वक्र $y = x^2 + x + 1$ को P तथा Q पर काटती है। $\ell(AP)\ \ell(AQ)$. का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 14

B-8. Find the direction in which a straight line must be drawn through the point (1, 2), so that its point of intersection with the line $x + y = 4$ may be at a distance $\frac{\sqrt{6}}{3}$ from this point.
बिन्दु (1, 2) से गुजरते हुए एक सरल रेखा किस दिशा में खींची जाए की सरल रेखा $x + y = 4$ के साथ इसके प्रतिच्छेद बिन्दु की बिन्दु (1, 2) से दूरी $\frac{\sqrt{6}}{3}$ रहे।

Ans. $\pi/12, 5\pi/12$

B-9. Through the point (3, 4) are drawn two straight lines each inclined at 45° to the straight line $x - y = 2$. Find their equations and also find the area of triangle bounded by the three lines.
रेखा $x - y = 2$ पर 45° पर झुकी हुई तथा बिन्दु (3, 4) से गुजरने वाली दो रेखाऐं खींची जाती है, इन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिये। तीनों रेखाओं से परिबद्ध त्रिभुज का क्षैत्रफल ज्ञात करो।

Ans. $x = 3, y = 4$, 9/2 sq. units वर्ग इकाई

B-10. Find the equation of a straight lines which passes through the point (2, 1) and makes an angle of $\pi/4$ with the straight line $2x + 3y + 4 = 0$
उस रेखा का समीकरण जोकि बिन्दु (2, 1) से गुजरती है तथा रेखा $2x + 3y + 4 = 0$ से $\pi/4$ का कोण बनाती हैं, है–

Ans. $x - 5y + 3 = 0, \quad 5x + y - 11 = 0$

B-11. From (1, 4) you travel $5\sqrt{2}$ units by making 135° angle with positive x-axis (anticlockwise) and then 4 units by making 120° angle with positive x-axis (clockwise) to reach Q. Find co-ordinates of point Q.
आप (1, 4) से धनात्मक x-अक्ष के साथ 135° कोण से वामावर्त दिशा में $5\sqrt{2}$ इकाई दूरी चलकर धनात्मक x-अक्ष के साथ (दक्षिणावर्त दिशा में) 120° के कोण पर 4 इकाई दूरी से Q पर पहुँचता है। बिन्दु Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Ans. $\left(-6, 9 - 2\sqrt{3}\right)$

B-12. The ends of the hypotenuse of a right angled triangle are (6, 0) and (0, 6), then find the locus of third vertex of triangle.
समकोण त्रिभुज के कर्ण के सिरे (6, 0) तथा (0, 6) है, तब त्रिभुज के तीसरे शीर्ष का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$.

B-13. A point moves in the x-y plane such that the sum of its distances from two mutually perpendicular lines is always equal to 3, then find the area enclosed by the locus of the point.

एक बिन्दु x-y समतल में इस प्रकार गमन करता है कि इसकी दो परस्पर लम्बवत रेखाओं से दूरियों का योग सदैव 3 इकाई रहता है। उस बिन्दु के बिन्दुपथ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है

Ans. 18

B-14. One side of a rectangle lies along the line $4x + 7y + 5 = 0$. Two of its vertices are $(-3, 1)$ and $(1, 1)$. Then find the equations of other sides.
एक आयत की एक भुजा रेखा $4x + 7y + 5 = 0$ के अनुदिश है इस के दो शीर्ष $(-3, 1)$ तथा $(1, 1)$ है, तो अन्य भुजाओं का समीकरण ज्ञात करो।

Ans. $7x - 4y + 25 = 0$, $7x - 4y - 3 = 0$, $4x + 7y = 11$

Section (C) : Position of point, linear inequation, perpendicular distance, image & foot, Area of Parallelogram

खण्ड (C) : बिन्दु की स्थिति, रैखिक असमिकाऐं लम्बवत् दूरी, प्रतिबिम्ब और लम्बपाद, समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

C-1. Plot the region
आरेख खीचींए–
(i) $6x + 2y \geq 31$ (ii) $2x + 5y \leq 10$ (iii) $8x + 3y + 6 > 0$ (iv) $x > 2$

C-2. Find coordinates of the foot of perpendicular, image and equation of perpendicular drawn from the point $(2, 3)$ to the line $y = 3x - 4$.
बिन्दू $(2, 3)$ से रेखा $y = 3x - 4$ पर खींचे गऐ लम्ब की समीकरण, इस लम्ब के लम्बपाद के निर्देशांक तथा इस बिन्दु का रेखा के सापेक्ष प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

Ans. Foot लम्बपाद $\left(\frac{23}{10}, \frac{29}{10}\right)$, Image प्रतिबिम्ब $\left(\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right)$, $x + 3y - 11 = 0$

C-3. Starting at the origin, a beam of light hits a mirror (in the form of a line) at the point A(4, 8) and reflected line passes through the point B (8, 12). Compute the slope of the mirror.
एक प्रकाश किरण, मूलबिन्दु से आती हुई एक रेखीय दर्पण से बिन्दु A(4, 8) पर टकराकर बिन्दु B (8, 12) से गुजरती है तब दर्पण रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$

C-4. Find the nearest point on the line $3x + 4y - 1 = 0$ from the origin.
मूलबिन्दु से रेखा $3x + 4y - 1 = 0$ के नजदीक का बिन्दु है।

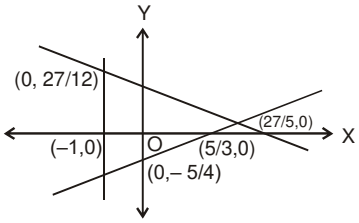
Ans. $\left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$

Sol. Required point is foot of perpendicular from (0, 0) on the given line which is $\frac{\alpha - 0}{3} = \frac{\beta - 0}{4} = \frac{-(-1)}{25}$
अभीष्ट बिन्दु (0, 0) से दी गई रेखा पर डाले गये लम्ब का पाद है जो $\frac{\alpha - 0}{3} = \frac{\beta - 0}{4} = \frac{-(-1)}{25}$ है।

C-5. Find the position of the origin with respect to the triangle whose sides are $x + 1 = 0$, $3x - 4y - 5 = 0$, $5x + 12y - 27 = 0$.
मूल बिन्दु की रेखाओं $x + 1 = 0$, $3x - 4y - 5 = 0$ व $5x + 12y - 27 = 0$ से बनने वाले त्रिभुज के सापेक्ष स्थिति ज्ञात करो।

Ans. Inside अंदर स्थित है।

Sol. Plot diagram आरेख खीचिएं



C-6. Find the area of parallelogram whose two sides are $y = x + 3$, $2x - y + 1 = 0$ and remaining two sides are passing through (0, 0).
उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ $y = x + 3$, $2x - y + 1 = 0$ है तथा अन्य दो भुजायें (0, 0) से गुजरती है।

Ans. 3 sq. unit वर्ग इकाई

C-7. Is there a real value of λ for which the image of the point $(\lambda, \lambda - 1)$ by the line mirror $3x + y = 6\lambda$ is the point $(\lambda^2 + 1, \lambda)$? If so find λ.
क्या λ का कोई वास्तविक मान है जिसके लिए बिन्दु $(\lambda, \lambda - 1)$ का रेखा दर्पण $3x + y = 6\lambda$ के सापेक्ष प्रतिबिम्ब बिन्दु $(\lambda^2 + 1, \lambda)$ हो ? यदि ऐसा हो, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 2

C-8. Find the equations of two straight lines which are parallel to $x + 7y + 2 = 0$ and at $\sqrt{2}$ distance away from it.
सरल रेखा $x + 7y + 2 = 0$ के समान्तर सरल रेखाओं के समीकरण है, जो इससे $\sqrt{2}$ दुरी पर है।

Ans. $x + 7y + 12 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$

C-9. Prove that the area of the parallelogram contained by the lines $4y - 3x - a = 0$, $3y - 4x + a = 0$, $4y - 3x - 3a = 0$ and $3y - 4x + 2a = 0$ is $\frac{2}{7}a^2$.
सिद्ध कीजिए कि रेखाओं $4y - 3x - a = 0$, $3y - 4x + a = 0$, $4y - 3x - 3a = 0$ एवं $3y - 4x + 2a = 0$ से बने समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\frac{2}{7}a^2$ वर्ग इकाई है।

Section (D) : Centroid, orthocentre, circumcentre, incentre, excentre, Locus
खण्ड (D) : केन्द्रक लम्बकेन्द्र, परिकेन्द्र बहिष्केन्द्र, बिन्दुपथ

D-1. For triangle whose vertices are (0, 0), (5, 12) and (16, 12). Find coordinates of
(i) Centroid (ii) Circumcentre
(iii) Incentre (iv) Excentre opposite to vertex (5, 12)
शीर्षो (0, 0), (5, 12) व (16, 12) वाले त्रिभुज के लिये निम्न ज्ञात करो
(i) केन्द्रक (ii) परिकेन्द्र
(iii) अन्तः केन्द्र (iv) शीर्ष (5, 12) के सम्मुख बर्हिकेन्द्र

Ans. (i) (7, 8) (ii) $\left(\frac{21}{2}, \frac{8}{3}\right)$ (iii) (7, 9) (iv) (27, –21)

D-2. Find the sum of coordinates of the orthocentre of the triangle whose sides are $x = 3$, $y = 4$ and $3x + 4y = 6$.
एक त्रिभुज की भुजाएँ $x = 3$, $y = 4$ एवं $3x + 4y = 6$ है, तो त्रिभुज के लम्बकेन्द्र के निर्देशांक का योगफल है –

Ans. 7

D-3. Find equations of altitudes and the co-ordinates of the othocentre of the triangle whose sides are $3x - 2y = 6$, $3x + 4y + 12 = 0$ and $3x - 8y + 12 = 0$.
भुजाओं $3x - 2y = 6$, $3x + 4y + 12 = 0$ व $3x - 8y + 12 = 0$ वाले त्रिभुज के शीर्षलम्बों के समीकरण तथा लम्ब केंद्र के निर्देशांक ज्ञात करो।

Ans. $2x + 3y + 8 = 0$, $4x - 3y - 7 = 0$, $8x + 3y + 9 = 0$, orthocentre लम्बकेंद्र $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{23}{9}\right)$.

D-4. A triangle has the lines $y = m_1x$ and $y = m_2x$ for two of its sides, where m_1, m_2 are the roots of the equation $x^2 + ax - 1 = 0$, then find the orthocentre of triangle.

एक त्रिभुज की दो भुजाएं $y = m_1x$ तथा $y = m_2x$ है जहाँ m_1, m_2 समीकरण $x^2 + ax - 1 = 0$ के मूल है। तब त्रिभुज का लम्बकेन्द्र है।

Ans. (0, 0)

D-5. Prove that the circumcentre, orthocentre, incentre & centroid of the triangle formed by the points A(–1, 11); B (–9, –8); C (15, –2) are collinear, without actually finding any of them.
सिद्ध कीजिए बिन्दुओं A(–1, 11); B (–9, –8); C (15, –2) से बनने वाले त्रिभुज का परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र, अन्तःकेन्द्र एवं केन्द्रक संरेखीय है। (किसी को भी ज्ञात किए बिना।)

D-6. Find locus of centroid of ΔAOB if line AB passes through (3, 2), A and B are on coordinate axes.

ΔAOB के केन्द्रक का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए यदि रेखा AB, बिन्दु (3, 2), से गुजरती है तथा A और B निर्देशांक अक्षों पर है –

Ans. $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 3$

D-7. Find the locus of the centroid of a triangle whose vertices are (a cos t, a sin t), (b sin t, –b cos t) and (1, 0), where 't' is the parameter.
एक त्रिभुज के केन्द्रक का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक (a cos t, a sin t), (b sin t, –b cos t) और (1, 0) हैं, जहाँ 't' प्राचल है।
Ans. $(3x - 1)^2 + 9y^2 = a^2 + b^2$

D-8. Show that equation of the locus of a point which moves so that difference of its distance from two given points (ae, 0) and (–ae, 0) is equal to 2a is $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$.
सिद्ध कीजिए एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ जिसकी दो स्थिर बिन्दुओं (ae, 0) व (–ae, 0) से दूरियों का अंतर सदैव स्थिर तथा 2a के बराबर होता है, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$ है।

D-9. Find the locus of point of intersection of the lines $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$ and $x \sin \alpha - y \cos \alpha = b$, where α is a parameter.
रेखाओं $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$ और $x \sin \alpha - y \cos \alpha = b$, जहाँ α एक प्राचल है, के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Sol Given $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$ .....(1) $x \sin \alpha - y \cos \alpha = b$ .....(2)
square (1) and (2) then add them $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Hindi. दिया गया है $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$ .....(1) $x \sin \alpha - y \cos \alpha = b$ .....(2)
(1) और (2) का वर्ग करके जोड़ने पर $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

D-10. The area of the triangle formed by the intersection of a line parallel to x-axis and passing through P(h, k) with the lines y = x and x + y = 2 is $4h^2$. Find the locus of the point P.

x–अक्ष के समान्तर एवं P(h, k) से गुजरने वाली रेखा तथा रेखाओं y = x एवं x + y = 2 द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल $4h^2$ हैं, तो बिन्दु P का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

Ans. y = 2x + 1 or y = –2x + 1

Section (E) : Angle Bisector, condition of concurrency, family of straight lines
खण्ड (E) : कोण अर्द्धक, संगामी होने का प्रतिबन्ध, सरल रेखाओं का निकाय

E-1. Find equations of acute and obtuse angle bisectors of the angle between the lines 4x + 3y – 7 = 0 and 24x + 7y – 31 = 0.
रेखाओं 4x + 3y – 7 = 0 तथा 24x + 7y – 31 = 0 के मध्य न्यून कोण व अधिक कोण समद्विभाजकों के समीकरण ज्ञात करो। तथा इनमें से कौनसे समद्विभाजक वाले क्षेत्र में मूलबिन्दू है ?

Ans. acute 2x + y – 3 = 0, obtuse x – 2y + 1 = 0, origin lies in obtuse angle bisector.

Ans. न्यून कोण अर्द्धक 2x + y – 3 = 0, अधिक कोण अर्धक x – 2y + 1 = 0, मूल बिंदू अधिक कोण में है।

E-2. Find the equation of a straight line passing through the point (4, 5) and equally inclined to the lines 3x = 4y + 7 and 5y = 12x + 6.
बिन्दु (4, 5) से गुजरने वाली एवं रेखाओं 3x = 4y + 7 तथा 5y = 12x + 6 से समान कोण पर झुकी रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. 9 x – 7 y = 1, 7 x + 9 y = 73

E-3. The line x + 3y – 2 = 0 bisects the angle between a pair of straight lines of which one has equation x – 7y + 5 = 0,then find equation of other line
रेखा x + 3y – 2 = 0 एक सरल रेखा युग्म के मध्य कोण को समद्विभाजित करती हैं। यदि रेखा युग्म की एक समीकरण x – 7y + 5 = 0 हो, तो अन्य रेखा की समीकरण है –

Ans. 5x + 5y – 3 = 0

E-4. Find the value of λ such that lines x + 2y = 3, 3x – y = 1 and λx + y = 2 can not form a triangle.
λ के मान ज्ञात कीजिए जबकि रेखाएँ x + 2y = 3, 3x – y = 1 तथा λx + y = 2 त्रिभुज नहीं बना सकती है।

Ans. $\frac{6}{5}, \frac{1}{2}, -3$

E-5. Find values of λ for which line y = x + 1, y = λx + 2 and y = $(\lambda^2 + \lambda - 1)$ x + 3 are con-current.

λ के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए y = x + 1, y = λx + 2 और y = $(\lambda^2 + \lambda - 1)$ x + 3 संगामी है।

Ans. 0

E-6. Find the equation to the straight line passing through
(i) The point (3, 2) and the point of intersection of the lines 2x + 3y = 1 and 3x – 4y = 6.
(ii) The intersection of the lines x + 2y + 3 = 0 and 3x + 4y + 7 = 0 and perpendicular to the straight line y – x = 8.
उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो
(i) बिन्दु (3, 2) तथा रेखाओं 2x + 3y = 1 व 3x – 4y = 6 के प्रतिच्छेदन बिन्दू से गुजरती है।
(ii) रेखाओं x + 2y + 3 = 0 व 3x + 4y + 7 = 0 के प्रतिच्छेदन बिन्दु से गुजरती है तथा सरल रेखा y – x = 8 के लम्बवत् है।

Ans. (i) 43x – 29y = 71 (ii) x + y + 2 = 0

E-7. Find the locus of the circumcentre of a triangle whose two sides are along the co-ordinate axes and third side passes through the point of intersection of the lines $ax + by + c = 0$ and $\ell x + my + n = 0$.

उस त्रिभुज के परिकेन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएं निर्देशांक अक्षों के अनुदिश है तथा तीसरी भुजा रेखाओं $ax + by + c = 0$ और $\ell x + my + n = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरती है।

Ans. $2xy(ma-b\ell) + x(an - \ell c) + y(mc - bn) = 0$.

Section (F) : Pair of straight lines, Homogenization

खण्ड (F) : सरल रेखाओं के अर्द्धक, समघातीकरण

F-1. If the slope of one of the lines represented by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ be the nth power of the other, then prove that $(ab^n)^{\frac{1}{n+1}} + (a^nb)^{\frac{1}{n+1}} + 2h = 0$

यदि रेखाओं $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ में से एक का ढाल दूसरी के ढाल की n वीं घात है तो सिद्ध कीजिए कि $(ab^n)^{\frac{1}{n+1}} + (a^nb)^{\frac{1}{n+1}} + 2h = 0$

F-2. For what value of λ does the equation $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$ represent a pair of straight lines ? Find their equations, point of intersection, acute angle between them and pair of angle bisector.

λ के किस मान के लिये समीकरण $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$ एक सरल रेखा युग्म को प्रदर्शित करती है। उन सरल रेखाओं के समीकरण, प्रतिच्छेदन बिन्दु, उनके मध्य न्यून कोण तथा कोण समद्विभाजकों का रेखा युग्म भी ज्ञात करो।

Ans. $\lambda = 2$, $3x - y + 2 = 0$, $4x - 2y + 1 = 0$, point of intersection प्रतिच्छेदन बिन्दु $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$,

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$, $2x^2 + 4xy - 2y^2 + 16x - 4y + 7 = 0$.

F-3. (i) Find the integral values of 'h' for which $hx^2 - 5xy + 4hy^2 + x + 2y - 2 = 0$ represents two real straight lines.

h के पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए जबकि $hx^2 - 5xy + 4hy^2 + x + 2y - 2 = 0$ दो वास्तविक सरल रेखाओं को प्रदर्शित करता है।

(ii) If the pair of lines represented by equation $k(k - 3)x^2 + 16xy + (k + 1)y^2 = 0$ are perpendicular to each other, then find k.

यदि $k(k - 3)x^2 + 16xy + (k + 1)y^2 = 0$ द्वारा प्रदर्शित रेखा युग्म, परस्पर एक दुसरे के लम्बवत् है तब k का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. (i) $h = 1$ (ii) $k = 1$

F-4. Find the equation of the straight lines joining the origin to the points of intersection of the line $lx + my + n = 0$ and the curve $y^2 = 4ax$. Also, find the condition of their perpendicularity.

सरल रेखा $lx + my + n = 0$ और वक्र $y^2 = 4ax$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो तथा लम्बवत् का प्रतिबन्ध भी ज्ञात कीजिए।

Ans : $4alx^2 + 4amxy + ny^2 = 0$; $4al + n = 0$

Ans : $4alx^2 + 4amxy + ny^2 = 0$; $4al + n = 0$

F-5. Find the condition that the diagonals of the parallelogram formed by the lines $ax + by + c = 0$; $ax + by + c' = 0$; $a'x + b'y + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ are at right angles. Also find the equation to the diagonals of the parallelogram.

रेखाओं $ax + by + c = 0$; $ax + by + c' = 0$; $a'x + b'y + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ से बने समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण के लम्बवत् होने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए तथा समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

Ans. $a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 \Rightarrow (a + a')x + (b + b')y + c + c' = 0 \Rightarrow (a - a')x + (b - b')y = 0$

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Section (A): Distance formula, section formula, Area of Triangle & polygon, Collinearity, slope

A-1. Mid point of A(0, 0) and B(1024, 2048) is A_1. mid point of A_1 and B is A_2 and so on. Coordinates of A_{10} are.

A(0, 0) और B(1024, 2048) का मध्य बिन्दु A_1 है, A_1 और B का मध्य बिन्दु A_2 है इसी प्रकार A_{10} के निर्देशांक है –

(A) (1022, 2044) (B) (1025, 2050) (C*) (1023, 2046) (D) (1, 2)

A-2. If the points (k, 2 – 2k), (1 – k, 2k) and (–k –4, 6 – 2k) be collinear, the number of possible values of k are
यदि बिन्दु (k, 2 – 2k), (1 – k, 2k) एवं (–k –4, 6 – 2k) संरेखीय हो, तो k के संभव मानों की संख्या है–
(A) 4 (B*) 2 (C) 1 (D) 3

A-3. Given a ΔABC with unequal sides. P is the set of all points which is equidistant from B & C and Q is the set of all point which is equidistant from sides AB and AC. Then $n(P \cap Q)$ equals :
(A) 1 (B*) 2 (C) 3 (D) Infinite
दिया गया है एक ΔABC जिसकी भुजायें असमान है। P उस सभी बिन्दुओं का समूह जो B और C से समान दूरी पर है। और Q उन बिन्दुओं का समूह है जो भुजाओं AB और AC से समान दूरी पर है। तब $n(P \cap Q)$ बराबर होगा :
(A) 1 (B*) 2 (C) 3 (D)अनन्त

A-4. A line segment AB is divided internally and externally in the same ratio (> 1) at P and Q respectively and M is mid point of AB.
एक रेखाखण्ड AB को P और Q क्रमशः समान अनुपात (> 1) में आन्तरिक और बाह्य विभाजित करता है तथा M, AB का मध्य बिन्दु है।
Statement-1: MP, MB, MQ are in G.P.
कथन-1: MP, MB, MQ गुणोत्तर श्रेणी में है।
Statement-2 AP, AB and AQ are in HP.
कथन-2 AP, AB तथा AQ हरात्मक श्रेणी में है।
(A*) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is correct explanation for STATEMENT-1
(B) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is not correct explanation for STATEMENT-1Pro
(C) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is false
(D) STATEMENT-1 is false, STATEMENT-2 is true
(E) Both STATEMENTS are false
(A*) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।
(E) सभी कथन असत्य है।

A-5. Find the area of the triangle formed by the mid points of sides of the triangle whose vertices are (2, 1), (– 2, 3), (4, – 3)
(A*) 1.5 sq. units (B) 3 sq. units (C) 6 sq. units (D) 12 sq. units

एक त्रिभुज के शीर्ष (2, 1), (– 2, 3) एवं (4, – 3) हैं। इस त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल है –

(A*) 1.5 वर्ग ईकाई (B) 3 वर्ग ईकाई (C) 6 वर्ग ईकाई (D) 12 वर्ग ईकाई

Section (B) : Different forms of straight lines and Angle between lines
खण्ड (B) : त्रिभुज और बहुभुज का क्षेत्रफल, सरल रेखाओं के विभिन्न रूप और रेखाओं के मध्य कोण

B-1. A straight line through P (1, 2) is such that its intercept between the axes is bisected at P. Its equation is :

बिन्दु P (1, 2) से गुजरने वाली एक सरल रेखा का अक्षों के मध्य अंतःखण्ड बिन्दु P पर समद्विभाजित होता है, तो इस रेखा की समीकरण है –

(A) $x + 2y = 5$ (B) $x - y + 1 = 0$ (C) $x + y - 3 = 0$ (D*) $2x + y - 4 = 0$

B-2. The number of integral points (integral point means both the coordinates should be integer) exactly in the interior of the triangle with vertices (0, 0), (0, 21) and (21, 0), is

शीर्ष (0, 0), (0, 21) एवं (21, 0) वाले त्रिभुज के ठीक अन्दर स्थित पूर्णांक बिन्दुओं (अर्थात् ऐसे बिन्दु जिनके x व y दोनों निर्देशांक पूर्णांक हो) की संख्या हैं –

(A) 133 (B*) 190 (C) 233 (D) 105

B-3. The line joining two points A (2, 0) and B (3, 1) is rotated about A in the anticlock wise direction through an angle of 15º. The equation of the line in the new position is :

(A) $x - \sqrt{3}\,y - 2 = 0$ (B) $x - 2y - 2 = 0$ (C*) $\sqrt{3}\,x - y - 2\sqrt{3} = 0$ (D) $\sqrt{2}\,x - y - 2\sqrt{2} = 0$

दो बिन्दुओं A (2, 0) तथा B (3, 1) से जाने वाली एक सरल रेखा को A के सापेक्ष वामावर्त दिशा में 15º कोण पर घुमाया जाता है तो नई स्थिति में रेखा की समीकरण होगी –

(A) $x - \sqrt{3}\,y - 2 = 0$ (B) $x - 2y - 2 = 0$ (C*) $\sqrt{3}\,x - y - 2\sqrt{3} = 0$ (D) $\sqrt{2}\,x - y - 2\sqrt{2} = 0$

B-4. In a ΔABC, side AB has the equation $2x + 3y = 29$ and the side AC has the equation $x + 2y = 16$. If the mid point of BC is (5, 6), then the equation of BC is

(A) $2x + y = 16$ (B*) $x + y = 11$ (C) $2x - y = 4$ (D) $x + y = 10$

एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB व AC की समीकरणें क्रमशः $2x + 3y = 29$ तथा $x + 2y = 16$ है यदि भुजा BC का मध्य बिन्दु (5, 6) हो तो भुजा BC की समीकरण है–

(A) $2x + y = 16$ (B*) $x + y = 11$ (C) $2x - y = 4$ (D) $x + y = 10$

B-5. A square of side 'a' lies above the x-axis and has one vertex at the origin. The side passing through the origin makes an angle $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ with the positive direction of x-axis. The equation of its diagonal not passing through the origin is :

यदि 'a' भुजा का वर्ग x-अक्ष के ऊपर स्थित है तथा उसका एक शीर्ष मूलबिन्दु पर है। मूल बिन्दु से गुजरने वाली भुजा x अक्ष की धनात्मक दिशा से $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ कोण बनाती है। इसके मूल बिन्दु से न गुजरने वाले विकर्ण की समीकरण है –

(A) $y(\cos\alpha - \sin\alpha) - x(\sin\alpha - \cos\alpha) = a$ (B) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\sin\alpha - \cos\alpha) = a$
(C) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\sin\alpha + \cos\alpha) = a$ (D*) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\cos\alpha - \sin\alpha) = a$

B-6. Find equation of a straight line on which length of perpendicular from the origin is four units and the line makes an angle of 120º with the positive direction of x-axis.

सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई 4 इकाई तथा रेखा धनात्मक x-अक्ष से 120º का कोण बनाती है।

(A) $\sqrt{3}\,x - y = 0$ (B*) $\sqrt{3}\,x + y = 8$ (C) $x + \sqrt{3}\,y = 8$ (D) $x - \sqrt{3}\,y = 8$

B-7. The distance of the point (2, 3) from the line 2 x – 3 y + 9 = 0 measured along a line x – y + 1 = 0 is :

बिन्दु (2, 3) की रेखा x – y + 1 = 0 के अनुदिश रेखा 2 x – 3 y + 9 = 0 से दूरी है –

(A) $5\sqrt{3}$ (B*) $4\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

B-8. If a point P(x, y) from where line drawn cuts coordinate axes at A and B (with A on x-axis and B on y-axis) satisfies $\alpha.\frac{x^2}{PB^2}+\beta\frac{y^2}{PA^2}=1$, then $\alpha + \beta$ is

यदि बिन्दु P(x, y) से जहाँ रेखा निर्देशांक अक्षों को A तथा B पर काटती है तथा $\alpha.\frac{x^2}{PB^2}+\beta\frac{y^2}{PA^2}=1$, को संतुष्ट करती है तब $\alpha + \beta$ का मान है– (जहाँ A, x-अक्ष पर है तथा B, y-अक्ष पर है)

(A) 1 (B*) 2 (C) 3 (D) 4

B-9. Two particles start from the point (2, – 1), one moving 2 units along the line x + y = 1 and the other 5 units along the line x – 2y = 4. If the particles move towards increasing y, then their new positions are
बिन्दु (2, – 1) से दो कण चलते है। उनमें से एक रेखा x + y = 1 के अनुदिश 2 इकाई दुरी चलता है तथा अन्य रेखा x – 2y = 4 के अनुदिश 5 इकाई दूरी चलता है। यदि दोनो कण y के बढने की दिशा में हो तब इनकी नयी स्थिति है–

(A*) $\left(2-\sqrt{2},\sqrt{2}-1\right)$, $\left(2\sqrt{5}+2,\sqrt{5}-1\right)$ (B) $\left(2\sqrt{5}+2,\sqrt{5}-1\right)$, $\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}+1\right)$
(C) $\left(2+\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1\right)$, $\left(2\sqrt{5}+2,\sqrt{5}+1\right)$ (D) none of these इनमें से कोई नहीं।

B-10. Equation of a straight line passing through the origin and making with x – axis an acute angle twice the size of the angle made by the line y = (0.2) x with the x – axis, is :
रेखा y = (0.2) x द्वारा x –अक्ष के साथ बनाए गए कोण का दुगना कोण बनाने वाली एवं मूलबिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण है :
(A) y = (0.4) x (B*) y = (5/12) x (C) 6y – 5x = 0 (D) 6y + 5x = 0

B-11. The points A (1, 3) and C (5,1) are the oppositive vertices of rectangle. The equation of line passing through other two vertices and of gradient 2, is

बिन्दुओं A (1, 3) तथा C (5,1) आयत के विपरीत शीर्ष है। अन्य दो शीर्षो और प्रवणता 2 से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है–

(A) 2x+y–8 = 0 (B*) 2x–y–4 = 0 (C) 2x–y+4 = 0 (D) 2x+y = 0

B-12. The point (–4,5) is the vertex of a square and one of its digonals is 7x–y+8 = 0. The equation of the other diagonal is

बिन्दु P(–4,5) वर्ग का एक शीर्ष है तथा इसका विकर्ण 7x–y+8 = 0. है तो इसके अन्य विकर्ण का समीकरण है –

(A) $7x-y+23 = 0$ (B) $7y + x = 30$ (C*) $7y + x = 31$ (D) $x - 7y = 30$

B-13. Two straight lines $x + 2y = 2$ and $x + 2y = 6$ are given, then find the equation of the line parallel to given lines and divided distance between lines in the ratio 2 : 1 internally

दो रेखाएं $x + 2y = 2$ और $x + 2y = 6$ दी गई है तब रेखा का समीकरण जो दी गई रेखाओं के समान्तर है और उन रेखाओं के मध्य की दुरी को 2 : 1 में अन्तः विभाजित करती है।

(A) $3x + 6y + 8 = 0$ (B*) $3x + 6y = 14$
(C) $3x + 6y + 14 = 0$ (D) $3x + 2y = 10$

Section (C) : Position of point, linear inequation, perpendicular distance, image & foot
खण्ड (C) : बिन्दु की स्थिति, रैखिक असमिकाऐं लम्बवत् दूरी, प्रतिबिम्ब और लम्बपाद

C-1. The set of values of 'b' for which the origin and the point (1, 1) lie on the same side of the straight line, $a^2x + a\,by + 1 = 0$ $\forall$ $a \in R$, $b > 0$ are :

'b' के उन मानों का समुच्चय, जिनके लिये मूलबिन्दु तथा बिन्दु (1, 1) सरल रेखा $a^2x + a\,by + 1 = 0$ के एक ही ओर स्थित हैं (सभी $a \in R$, $b > 0$ के लिये) :

(A) $b \in (2, 4)$ (B*) $b \in (0, 2)$ (C) $b \in [0, 2]$ (D) $(2, \infty)$

C-2. The point $(a^2, a + 1)$ is a point in the angle between the lines $3x - y + 1 = 0$ and $x + 2y - 5 = 0$ containing the origin, then

(A) $a \geq 1$ or $a \leq -3$ (B*) $a \in (-3, 0) \cup (1/3, 1)$
(C) $a \in (0, 1)$ (D) $a \in (-\infty, 0)$

बिन्दु $(a^2, a + 1)$ रेखाओं $3x - y + 1 = 0$ एवं $x + 2y - 5 = 0$ के मध्य उस कोण में स्थित होगा जिसमें मूल बिन्दु स्थित है, तो

(A) $a \geq 1$ या $a \leq -3$ (B) $a \in (-3, 0) \cup (1/3, 1)$
(C) $a \in (0, 1)$ (D) $a \in (-\infty, 0)$

C-3. Find area of region represented by $3x + 4y > 12$, $4x + 3y > 12$ and $x + y < 4$

$3x + 4y > 12$, $4x + 3y > 12$ और $x + y < 4$ से निरूपित क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(A*) $\frac{8}{7}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{8}{7}$

C-4. The image of the point A (1, 2) by the line mirror $y = x$ is the point B and the image of B by the line mirror $y = 0$ is the point (α, β), then :

(A) $\alpha = 1, \beta = -2$ (B) $\alpha = 0, \beta = 0$ (C*) $\alpha = 2, \beta = -1$ (D) $\alpha = 1, \beta = -1$

रेखा दर्पण $y = x$ में बिन्दु A (1, 2) का प्रतिबिम्ब B है तथा रेखा दर्पण $y = 0$ में B के प्रतिबिम्ब के निर्देशांक (α, β) है, तो–

(A) $\alpha = 1, \beta = -2$ (B) $\alpha = 0, \beta = 0$ (C) $\alpha = 2, \beta = -1$ (D) $\alpha = 1, \beta = -1$

C-5. The equations of the perpendicular bisector of the sides AB and AC of a ΔABC are $x - y + 5 = 0$ and $x + 2y = 0$ respectively. If the point A is (1, –2), then the equation of the line BC is :

ΔABC की भुजाओं AB व AC के लम्ब समद्विभाजकों की समीकरणें क्रमशः $x - y + 5 = 0$ तथा $x + 2y = 0$ है यदि बिन्दु A (1, –2) हो, तो भुजा BC की समीकरण होगी –

(A*) $14x + 23y = 40$ (B) $14x - 23y = 40$ (C) $23x + 14y = 40$ (D) $23x - 14y = 40$

C-6. A light beam emanating from the point A(3, 10) reflects from the straight line $2x + y - 6 = 0$ and then passes through the point B(4, 3). The equation of the reflected beam is $x + 3y - \lambda = 0$, then the value of λ is

बिन्दु A(3, 10) से उत्सर्जित होने वाली एक प्रकाश किरण, सरल रेखा $2x + y - 6 = 0$ से परावर्तित होकर बिन्दु B(4, 3) से गुजरती है, तो परावर्तित प्रकाश किरण का समीकरण $x + 3y - \lambda = 0$ हो तो λ का मान है–

(A) 11 (B) 12 (C*) 13 (D) 14

Section (D) : Centroid, orthocentre, circumcentre, incentre, excentre, Locus
खण्ड (D) : केन्द्रक लम्बकेन्द्र, परिकेन्द्र बहिष्केन्द्र, बिन्दुपथ

D-1. The orthocentre of the triangle ABC is 'B' and the circumcentre is 'S' (a, b). If A is the origin, then the co–ordinates of C are :
यदि त्रिभुज ABC का लम्बकेंद्र 'B' तथा परिकेंद्र 'S' (a, b) हो तथा A मूल बिन्दू हो, तो C के निर्देशांक होंगे :

(A*) (2a, 2b) (B) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ (C) $\left(\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right)$ (D) none इनमें से कोई नहीं

D-2. A triangle ABC with vertices A (– 1, 0),B (– 2, 3/4) & C (– 3, – 7/6) has its orthocentre H. Then the orthocentre of triangle BCH will be :

(A) (– 3, – 2) (B) (1, 3) (C) (– 1, 2) (D*) none of these

एक त्रिभुज ABC जिसके शीर्ष A (– 1, 0),B (– 2, 3/4) व C (– 3, – 7/6) है, का लम्बकेन्द्र H है तो ΔBCH का लम्बकेन्द्र होगा।

(A) (– 3, – 2) (B) (1, 3) (C) (– 1, 2) (D*) इनमें से कोई नहीं

D-3. Find locus of centroid of ΔABC, if B(1, 1), C(4, 2) and A lies on the line $y = x + 3$.
ΔABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए यदि B(1, 1), C(4, 2) और A, रेखा $y = x + 3$ पर स्थित है।

(A) $3x + 3y + 1 = 0$ (B) $x + y = 3$ (C*) $3x - 3y + 1 = 0$ (D) $x - y = 3$

D-4. The locus of the mid-point of the distance between the axes of the variable line $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, where p is constant, is

एक चर रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, (जहाँ p अचर है) के अक्षों के मध्य अंतःखण्ड के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है–

(A) $x^2 + y^2 = 4p^2$ (B*) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$ (C) $x^2 + y^2 = \frac{4}{p^2}$ (D) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{2}{p^2}$

D-5. Find the locus of a point which moves so that sum of the squares of its distance from the axes is equal to 3.

बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जबकि अक्षो से इसके वर्गो का योगफल 3 के बराबर है–

(A) $x^2 + y^2 = 9$ (B*) $x^2 + y^2 = 3$ (C) $|x|+|y|=3$ (D) $x^2 - y^2 = 3$

D-6. A variable straight line passes through a fixed point (a, b) intersecting the co–ordinates axes at A & B. If 'O' is the origin, then the locus of the centroid of the triangle OAB is :
एक स्थिर बिन्दु (a, b) से गुजरने वाली एक चर सरल रेखा निर्देशी अक्षों को क्रमशः A और B पर काटती है, यदि 'O' मूलबिन्दु हो, तो त्रिभुज OAB के केंद्रक का बिन्दुपथ है–

(A*) $bx + ay - 3xy = 0$ (B) $bx + ay - 2xy = 0$
(C) $ax + by - 3xy = 0$ (D) $ax + by - 2xy = 0$

D-7. Consider a triangle ABC, whose vertices are A(–2, 1), B(1, 3) and C(x, y). If C is a moving point such that area of ΔABC is constant, then locus of C is :

(A*) Straight line (B) Circle (C) Ray (D) Parabola

माना कि एक त्रिभुज ABC है। जिसके शीर्ष A(–2, 1), B(1, 3) और C(x, y) यदि एक बिन्दु C इस तरह से गति करता है त्रिभुज ΔABC का क्षेत्रफल नियत रहे तो बिन्दु C का बिन्दुपथ होगा :

(A) सरल रेखा (B) वृत्त (C) किरण (D) परवलय

D-8. If the equation of the locus of a point equidistant from the points (a_1, b_1) and (a_2, b_2) is $(a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + c = 0$, then the value of 'c' is :

यदि बिन्दुओं (a_1, b_1) तथा (a_2, b_2) से समान दूरी पर स्थित बिन्दु का बिन्दुपथ $(a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + c = 0$ है, तब 'c' का मान है –

(A*) $\frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2)$ (B) $a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2$

(C) $\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)$ (D) $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2}$

Section (E) : Angle Bisector, condition of concurrency, family of straight lines
खण्ड (E) : कोण अर्द्धक, संगामी होने का प्रतिबन्ध, सरल रेखाओं का निकाय

E-1. The equation of bisectors of two lines L_1 & L_2 are $2x - 16y - 5 = 0$ and $64x + 8y + 35 = 0$. If the line L_1 passes through (– 11, 4), the equation of acute angle bisector of L_1 & L_2 is :

(A*) $2x - 16y - 5 = 0$ (B) $64x + 8y + 35 = 0$ (C) $2x + 16y + 5 = 0$ (D) $2x + 16y - 5 = 0$

दो रेखाओं L_1 व L_2 के कोण समद्विभाजक के समीकरण $2x - 16y - 5 = 0$ तथा $64x + 8y + 35 = 0$ है। यदि रेखा L_1 बिंदु (– 11, 4) से गुजरती है तो L_1 व L_2 के न्यूनकोण समद्विभाजक का समीकरण है –

(A*) $2x - 16y - 5 = 0$ (B) $64x + 8y + 35 = 0$

(C) $2x + 16y + 5 = 0$ (D) $2x + 16y - 5 = 0$

E-2. The equation of the internal bisector of $\angle$BAC of ΔABC with vertices A(5, 2), B(2, 3) and C(6, 5) is

(A) $2x + y + 12 = 0$ (B) $x + 2y - 12 = 0$ (C*) $2x + y - 12 = 0$ (D) $2x - y - 12 = 0$

शीर्षों A(5, 2), B(2, 3) व C(6, 5) से बने त्रिभुज ABC के कोण $\angle$BAC के आंतरिक कोण समद्विभाजक की समीकरण है–

(A) $2x + y + 12 = 0$ (B) $x + 2y - 12 = 0$ (C*) $2x + y - 12 = 0$ (D) $2x - y - 12 = 0$

E-3. The equation of the bisector of the angle between two lines $3x - 4y + 12 = 0$ and $12x - 5y + 7 = 0$ which contains the point (– 1, 4) is :

दो रेखाओं $3x - 4y + 12 = 0$ एवं $12x - 5y + 7 = 0$ के बीच बिन्दु (– 1, 4) को समाहित करने वाले कोण के अर्धक का समीकरण है –

(A*) $21x + 27y - 121 = 0$ (B) $21x - 27y + 121 = 0$

(C) $21x + 27y + 191 = 0$ (D) $\frac{-3x + 4y - 12}{5} = \frac{12x - 5y + 7}{13}$

E-4. The least positive value of t so that the lines $x = t + a$, $y + 16 = 0$ and $y = ax$ (where a is real variable) are concurrent is

t का न्यूनतम धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जबकि रेखाएं $x = t + a$, $y + 16 = 0$ और $y = ax$ (जहाँ a वास्तविक चर है) संगामी है–

(A) 2 (B) 4 (C) 16 (D*) 8

E-5. Consider the family of lines $5x + 3y - 2 + \lambda_1 (3x - y - 4) = 0$ and $x - y + 1 + \lambda_2(2x - y - 2) = 0$. Equation of a straight line that belong to both families is -
माना कि रेखाओं का निकाय $5x + 3y - 2 + \lambda_1 (3x - y - 4) = 0$ और $x - y + 1 + \lambda_2(2x - y - 2) = 0$ सरल रेखा का समीकरण, दोनों निकायों में है
(A) $25x - 62y + 86 = 0$ (B) $62x - 25y + 86 = 0$
(C) $25x - 62y = 86$ (D*) $5x - 2y - 7 = 0$

E-6. The equation of a line of the system $2x + y + 4 + \lambda (x - 2y - 3) = 0$ which is at a distance $\sqrt{10}$ units from point A(2, –3) is
(A) $3x + y + 1 = 0$ (B*) $3x - y + 1 = 0$ (C) $y - 3x + 1 = 0$ (D) $y + 3x - 2 = 0$
निकाय $2x + y + 4 + \lambda (x - 2y - 3) = 0$ की उस रेखा की समीकरण जो बिन्दु A(2, –3) से $\sqrt{10}$ इकाई दूरी पर स्थित है।
(A) $3x + y + 1 = 0$ (B*) $3x - y + 1 = 0$ (C) $y - 3x + 1 = 0$ (D) $y + 3x - 2 = 0$

E-7. The lines $ax + by + c = 0$, where $3a + 2b + 4c = 0$, are concurrent at the point
यदि $3a + 2b + 4c = 0$ हो, तो $ax + by + c = 0$ से प्रदर्शित सरल रेखाएँ निम्न में से किस बिन्दु पर संगामी हैं –
(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ (B) (1, 3) (C) (3, 1) (D*) $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

E-8. Find the equation of a straight line which passes through the point of intersection of the straight lines $x + y - 5 = 0$ and $x - y + 3 = 0$ and perpendicular to the straight line intersecting x-axis at the point (–2, 0) and the y-axis at the point (0, –3),
एक रेखा जोकि रेखाओं $x + y - 5 = 0$ तथा $x - y + 3 = 0$ के प्रतिच्छेदी बिन्दु से गुजरती है तथा उस रेखा के लम्बवत् है जो कि x-अक्ष को बिन्दु (–2, 0) व y-अक्ष को (0, –3) पर काटती है, का समीकरण है
(A) $2x + 3y + 10 = 0$ (B*) $2x - 3y + 10 = 0$
(C) $2x - 5y + 10 = 0$ (D) $2x + 5y + 10 = 0$

E-9. The line parallel to the x-axis and passing through the intersection of the lines $ax + 2by + 3b = 0$ and $bx - 2ay - 3a = 0$, where $(a, b) \neq (0, 0)$ is
(A) Above the x-axis at a distance of 3/2 from it
(B) Above the x-axis at a distance of 2/3 from it
(C*) Below the x-axis at a distance of 3/2 from it
(D) Below the x-axis at a distance of 2/3 from it
रेखा x-अक्ष के समान्तर तथा रेखाओं $ax + 2by + 3b = 0$ और $bx - 2ay - 3a = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरती है, जहाँ $(a, b) \neq (0, 0)$
(A) x-अक्ष के ऊपर इससे 3/2 इकाई दुरी पर (B) x-अक्ष से ऊपर इससे 2/3 दुरी पर
(C*) x-अक्ष से नीचे इससे 3/2 दुरी पर (D) x-अक्ष के नीचे इससे 2/3 दुरी पर

Section (F) : Pair of straight lines, Homogenization
खण्ड (F) : सरल रेखाओं के अर्द्धक, समघातीकरण

F-1. If the slope of one line of the pair of lines represented by $ax^2 + 10xy + y^2 = 0$ is four times the slope of the other line, then a =
यदि रेखा युग्म $ax^2 + 10xy + y^2 = 0$ की एक रेखा की ढाल, दूसरी की ढाल की चार गुना है तो a =
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D*) 16

F-2. The combined equation of the bisectors of the angle between the lines represented by $(x^2 + y^2)\sqrt{3} = 4xy$ is

रेखा युग्म $(x^2 + y^2)\sqrt{3} = 4xy$ के कोण समद्विभाजकों की संयुक्त समीकरण है–

(A*) $y^2 - x^2 = 0$ (B) $xy = 0$ (C) $x^2 + y^2 = 2xy$ (D) $\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{3}} = \frac{xy}{2}$

F-3. The equation of second degree $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 4x + 4\sqrt{2}y + 1 = 0$ represents a pair of straight lines. The distance between them is

समीकरण $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 4x + 4\sqrt{2}y + 1 = 0$ सरल रेखाओं के युग्म को प्रदर्शित करती है तब उनके मध्य दुरी है–

(A) 4 (B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (C*) 2 (D) $2\sqrt{3}$

F-4. The straight lines joining the origin to the points of intersection of the line $2x + y = 1$ and curve $3x^2 + 4xy - 4x + 1 = 0$ include an angle :

सरल रेखा $2x + y = 1$ तथा वक्र $3x^2 + 4xy - 4x + 1 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिंदुओं को मूलबिंदु से जोड़ने पर प्राप्त सरल रेखाओं के मध्य कोण है –

(A*) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1.

	Column –I		Column – II
(A)	The points A(–4, –1), B (–2, –4), C (4, 0) and D(2, 3) are the vertices of	(p)	Square
(B)	The figure formed by the lines $2x + 5y + 4 = 0$, $5x + 2y + 7 = 0$, $2x + 5y + 3 = 0$ and $5x + 2y + 6 = 0$ is	(q)	Rectangle
(C)	A quadrilateral whose diagonal are perpendicular bisectors of each other must be	(r)	Rhombus
(D)	A quadrilateral whose diagonals are angle bisector of sides and bisect each other must be	(s)	Parallelogram
	स्तम्भ–I		**स्तम्भ– II**
(A)	बिन्दु A(–4, –1), B (–2, –4), C (4, 0) एवं D(2, 3) किसके शीर्ष है –	(p)	वर्ग
(B)	रेखाओं $2x + 5y + 4 = 0$, $5x + 2y + 7 = 0$, $2x + 5y + 3 = 0$ तथा $5x + 2y + 6 = 0$ से बनने वाली आकृति हैं–	(q)	आयत
(C)	चतुर्भुज जिसके विकर्ण लम्बसमद्विभाजक होते हैं	(r)	समचतुर्भुज
(D)	चतुर्भुज जिसके विकर्ण भुजाओं के कोण अर्द्धक हैं और एक दुसरे को समद्विभाजित करते है–	(s)	समान्तर चतुर्भुज

Ans. **(A) (q, s) (B) (r, s) (C) (r, s) (D) (r, s)**

2. **Match The Followings :**

Column –I		Column – II	
(A) ✍	P lies on the line y = x and Q lies on y = 2x. The equation for the locus of the mid point of PQ, if |PQ| = 4, is $25x^2 - \lambda xy + 13y^2 = 4$, then λ equals	(p)	36
(B)	The line $(K + 1)^2 x + ky - 2K^2 - 2 = 0$ passes through a point (α, β) regardless of value K. Then $(\alpha - \beta)$ equals :	(q)	6
(C)	Let two lines be $C_1 : 3x - 4y + 1 = 0$ and $C_2 : 8x + 6y + 1 = 0$ suppose (α, β) is a point which is at unit distance from each of the given lines. then sum of all possible value of α is	(r)	–4/5
(D)✍	If distance between the pair of parallel lines $x^2 + 2xy + y^2 - 8ax - 8ay - 9a^2 = 0$ is $25\sqrt{2}$, then 'a/5' is equal to	(s)	– 1

Ans. (A) → (p), (B) → (q), (C) → (r), (D) → (s)

स्तम्भ मिलान कीजिए –

स्तम्भ –I		स्तम्भ – II	
(A)✍	बिन्दु P रेखा y = x पर स्थित है और बिन्दु Q रेखा y = 2x पर स्थित है। तो PQ के मध्य बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण होगा, यदि |PQ| = 4, है $25x^2 - \lambda xy + 13y^2 = 4$, तब λ बराबर	(p)	36
(B)	(α, β) से गुजरने पर रेखा $(K + 1)^2 x + ky - 2K^2 - 2 = 0$, K से स्वतन्त्र है तब $(\alpha - \beta)$ बराबर होगा :	(q)	6
(C)	यदि दो रेखाये $C_1 : 3x - 4y + 1 = 0$ तथा $C_2 : 8x + 6y + 1 = 0$ माना (α, β) कोई बिन्दु जो कि प्रत्येक रेखा से ईकाई दूरी पर स्थित है तब α के सभी संभावित मानो का योगफल, होगा	(r)	–4/5
(D)✍	यदि समांतर सरल रेखाओं $x^2 + 2xy + y^2 - 8ax - 8ay - 9a^2 = 0$ के मध्य दूरी $25\sqrt{2}$ है, तो a/5 बराबर है –	(s)	– 1

Ans. (A) → (p), (B) → (q), (C) → (r), (D) → (s)

Exercise-2

✍ **Marked Questions may have for Revision Questions.**

✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. On the portion of the straight line x + 2y = 4 intercepted between the axes, a square is constructed on the side of the line away from the origin. Then the point of intersection of its diagonals has co–ordinates :

सरल रेखा x + 2y = 4 द्वारा अक्षों के मध्य काटे गये भाग पर एक वर्ग, मूल बिन्दु के विपरीत ओर, बनाया जाता है, तो इसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक होगें :

(A) (2, 3) (B) (3, 2) (C*) (3, 3) (D) (2,2)

2. If the straight line $ax + by + p = 0$ and $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ enclosed an angle of $\frac{\pi}{4}$ and the line $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ meets them at the same point, then $a^2 + b^2$ is

यदि सरल रेखा $ax + by + p = 0$ तथा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के मध्य कोण $\frac{\pi}{4}$ है तथा सरल रेखा $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ उन रेखाओं को एक ही बिन्दु पर मिलती है, तब $a^2 + b^2$ है–

(A) 4 (B) 3 (C*) 2 (D) 1

3. A ΔABC is formed by the lines $2x - 3y - 6 = 0$, $3x - y + 3 = 0$ and $3x + 4y - 12 = 0$. If the points $P(\alpha, 0)$ and $Q(0, \beta)$ always lie on or inside the ΔABC, then ;

एक त्रिभुज ABC, रेखाओं $2x - 3y - 6 = 0$, $3x - y + 3 = 0$ व $3x + 4y - 12 = 0$ द्वारा बनाया जाता है, यदि बिंदु $P(\alpha, 0)$ तथा $Q(0, \beta)$ सदैव ΔABC पर या उसके अंदर स्थित है, तो

(A) $\alpha \in [-1, 2]$ & $\beta \in [-2, 3]$ (B) $\alpha \in [-1, 3]$ & $\beta \in [-2, 4]$
(C) $\alpha \in [-2, 4]$ & $\beta \in [-3, 4]$ (D*) $\alpha \in [-1, 3]$ & $\beta \in [-2, 3]$

4. If $P\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}, 2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ be any point on a line, then the range of values of t for which the point P lies between the parallel lines $x + 2y = 1$ and $2x + 4y = 15$ is

(A*) $-\frac{4\sqrt{2}}{3} < t < \frac{5\sqrt{2}}{6}$ (B) $0 < t < \frac{5\sqrt{2}}{6}$ (C) $-\frac{4\sqrt{2}}{5} < t < 0$ (D) $-\frac{4\sqrt{2}}{3} < t < \frac{\sqrt{2}}{6}$

यदि बिन्दु $P\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}, 2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ एक रेखा पर स्थित कोई बिन्दु हो, तो t के उन मानों का समुच्चय जिनके लिये P, समांतर रेखाओं $x + 2y = 1$ तथा $2x + 4y = 15$ के बीच स्थित है –

(A) $-\frac{4\sqrt{2}}{3} < t < \frac{5\sqrt{2}}{6}$ (B) $0 < t < \frac{5\sqrt{2}}{6}$ (C) $-\frac{4\sqrt{2}}{5} < t < 0$ (D) $-\frac{4\sqrt{2}}{3} < t < \frac{\sqrt{2}}{6}$

5. The point A(4, 1) undergoes following transformations successively :

(i) reflection about line $y = x$
(ii) translation through a distance of 3 units in the positive direction of x-axis
(iii) rotation through an angle 105° in anti-clockwise direction about origin O.

Then the final position of point A is

(A) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$ (B) $\left(-2, 7\sqrt{2}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$ (D*) $\left(-2\sqrt{6}, 2\sqrt{2}\right)$

बिन्दु A(4, 1) क्रमागत रूप से निम्न रूपान्तरणों से गुजरता है

(i) रेखा $y = x$ के सापेक्ष प्रतिबिम्ब होता है।
(ii) x-अक्ष की धनात्मक दिशा में 3 इकाई विस्थापित होता है।
(iii) मूल बिन्दु O के सापेक्ष वामावर्त दिशा में 105° कोण से घूर्णित होता है।

तब बिन्दु A के अन्तिम स्थिति में निर्देशांक है

(A) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$ (B) $\left(-2, 7\sqrt{2}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$ (D*) $\left(-2\sqrt{6}, 2\sqrt{2}\right)$

6. Given two points $A \equiv (-2, 0)$ and $B \equiv (0, 4)$, then find coordinate of a point P lying on the line $2x - 3y = 9$ so that perimeter of Δ APB is least.

दो बिन्दु $A \equiv (-2, 0)$ तथा $B \equiv (0, 4)$ दिये गये हैं, सरल रेखा $2x - 3y = 9$ पर स्थित वह बिन्दु P जिसके लिये त्रिभुज APB का परिमाप न्यूनतम है, के निर्देशांक होंगे –

(A) $\left(\frac{42}{13}, -\frac{11}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{84}{13}, -\frac{74}{13}\right)$ (C*) $\left(\frac{21}{17}, -\frac{37}{17}\right)$ (D) $(0, -3)$

7. A ray of light is sent from the point (1, 4). Upon reaching the x-axis, the ray is reflected from the point (3, 0). This reflected ray is again reflected by the line x + y = 5 and intersect y-axis at P. Find the co-ordinate of P.
बिन्दु (1, 4) से एक रेखा किरण जाती है तथा x-अक्ष पर पहुंचकर यह बिन्दु (3, 0) से परावर्तित होती है पुनः यह रेखा x + y = 5 से परावर्तित होती है जो y-अक्ष को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती है तो P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(A) $\left(\frac{1}{2},0\right)$ (B*) $\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ (C) $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ (D) $\left(2,\frac{1}{-2}\right)$

8. AB is a variable line sliding between the co-ordinate axes in such a way that A lies on X-axis and B lies on Y-axis. If P is a variable point on AB such that PA = b, PB = a and AB = a + b, then equation of locus of P is

(A*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (B) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (C) $x^2+y^2=a^2+b^2$ (D) $x^2-y^2=a^2+b^2$

AB एक चर रेखा है जो निर्देशी अक्षों के बीच इस प्रकार फिसल रही है कि A, X-अक्ष पर स्थित है और B, Y-अक्ष पर स्थित है। यदि AB पर एक चर बिन्दु P इस प्रकार है कि PA = b, PB = a और AB = a + b, तो P के बिन्दुपथ का समीकरण है–

(A*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (B) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (C) $x^2+y^2=a^2+b^2$ (D) $x^2-y^2=a^2+b^2$

9. If the distance of any point (x, y) from the origin is defined as d(x, y) = max { |x|, |y|}, d(x, y) = a (where 'a' is non-zero constant), then the locus is

(A) A circle (B) Straight line (C*) A square (D) A triangle

यदि किसी बिन्दु (x, y) की मूल बिन्दु से परिभाषित दूरी d(x, y) = max { |x|, |y|}, d(x, y) = a (जहाँ 'a' अशून्य अचर है) तब बिन्दुपथ है

(A) एक वृत्त (B) सरल रेखा (C) एक वर्ग (D) एक त्रिभुज

10. Two ends A & B of a straight line segment of constant length 'c' slide upon the fixed rectangular axes OX & OY respectively. If the rectangle OAPB is completed. Then find locus of the foot of the perpendicular drawn from P to AB.
अचर लम्बाई c के एक सरल रेखाखण्ड के दो सिरे A और B स्थिर आयतीय अक्षों क्रमशः OX और OY पर फिसलते है। यदि आयत OAPB पूर्ण किया जाता है, तो P से AB पर डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है।

(A*) $x^{2/3}+y^{2/3}=c^{2/3}$ (B) $x^{2/3}+y^{2/3}=c^{1/3}$ (C) $x^{1/3}+y^{1/3}=c^{2/3}$ (D) $x^{1/3}+y^{1/3}=c^{1/3}$

11. Let the line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ cuts the x and y axes at A and B respectively. Now a line parallel to the given line cuts the coordinate axis at P and Q and points P and Q are joined to B and A respectively. The locus of intersection of the joining lines is

माना रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, x-अक्ष और y-अक्ष को क्रमश A और B पर प्रतिच्छेद करती है अब दी गई रेखा के समान्तर रेखा, निर्देशांक अक्षों को P और Q पर मिलती है तथा बिन्दुओं P और Q को B और A से क्रमशः जोड़ा जाता है तब दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है –

(A*) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ (B) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ (C) $\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0$ (D) $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=0$

12. A variable line whose slope is –2 cuts the x and y axes respectively at points A and C. A rhombus ABCD is completed such that vertex B lies on the line y = x. Then the locus of vertex D is

एक चर रेखा जिसकी प्रवणता –2 है क्रमशः x और y अक्ष को बिन्दुओं A और C पर मिलती है। एक समचतुर्भुज ABCD पूर्ण इस प्रकार किया गया है कि शीर्ष B, रेखा y = x. पर स्थित है तब शीर्ष D का बिन्दु पथ है –

(A) $2x + y = 1$ (B) $x - y = 0$ (C*) $x + y = 0$ (D) $x + 2y = 0$

13. ABCD is a square away from origin of side length 'a'. Its side AB slides between x and y–axes in first quadrant with A on x-axis and B on y-axis. The locus of the foot of perpendicular dropped from the point E on the diagonal AC (where E is the midpoint of the side AD), is

ABCD एक 'a' लम्बाई की भुजा का वर्ग है। इसकी भुजा AB, x और y अक्ष के मध्य प्रथम चतुर्थांश में फिसलता है, बिन्दु E से विकर्ण है AC पर डाले गए लम्ब के लम्बपाद का बिन्दुपथ है। (जहा E भुजा AD का मध्य बिन्दु है)

(A) $(y - x)^2 + (x - 3y)^2 = a^2$ (B) $(y - x)^2 + (x - 3y)^2 = \frac{a^2}{2}$

(C*) $(y - x)^2 + (x - 3y)^2 = \frac{a^2}{4}$ (D) None of these इनमें से कोई नहीं

14_. The locus of circumcentre of the triangle formed by vertices $A((-pq - p - q), -(1 + p)(1 + q))$, $B(pq + p - q, (1 + p)(1 + q))$, $C(pq + q - p, (1 + p)(1 + q))$ is

त्रिभुज जिसके शीर्ष $A((-pq - p - q), -(1 + p)(1 + q))$, $B(pq + p - q, (1 + p)(1 + q))$, $C(pq + q - p, (1 + p)(1 + q))$ है, के परिकेन्द्र का बिन्दुपथ है।

(A*) $y + x = 0$ (B) $y - x = 0$ (C) $x^2 + y^2 = 1$ (D) $xy = 1$

15_. Let two sides of rectangle of area 20 units are along lines $x - y = 0$ and $x + y = 2$, then the locus of point of intersection of diagnals is

(A) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$ or $(y - 1)^2 + (x - 1)^2 = 10$
(B*) $(x - 1)^2 - (y - 1)^2 = 10$ or $(y - 1)^2 - (x - 1)^2 = 10$
(C) $(x + 1)^2 - (y + 1)^2 = 10$ or $(y + 1)^2 - (x + 1)^2 = 10$
(D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$ or $(y + 1)^2 - (x + 1)^2 = 10$

माना 20 इकाई क्षेत्रफल के आयत की दो भुजाएँ रेखाओं $x - y = 0$ और $x + y = 2$ के अनुदिश है तब विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दु का बिन्दुपथ है–

(A) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$ या $(y - 1)^2 + (x - 1)^2 = 10$
(B*) $(x - 1)^2 - (y - 1)^2 = 10$ या $(y - 1)^2 - (x - 1)^2 = 10$
(C) $(x + 1)^2 - (y + 1)^2 = 10$ या $(y + 1)^2 - (x + 1)^2 = 10$
(D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$ या $(y + 1)^2 - (x + 1)^2 = 10$

16. Area of the triangle formed by the line $x + y = 3$ and angle bisectors of the pair of straight lines $x^2 - y^2 + 2y = 1$ is

(A*) 2 sq units (B) 4 sq. units (C) 6 sq. units (D) 8 sq. units

रेखा युग्म $x^2 - y^2 + 2y = 1$ के कोण समद्विभाजकों एवं रेखा $x + y = 3$ से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल है –

(A) 2 वर्ग इकाई (B) 4 वर्ग इकाई (C) 6 वर्ग इकाई (D) 8 वर्ग इकाई

17. Equation of the line pair through the origin and perpendicular to the line pair $xy - 3y^2 + y - 2x + 10 = 0$ is :

रेखा युग्म $xy - 3y^2 + y - 2x + 10 = 0$ केलम्बवत् एवं मूल बिन्दु से गुजरने वाले रेखा युग्म का समीकरण है :

(A) $xy - 3y^2 = 0$ (B*) $xy + 3x^2 = 0$ (C) $xy + 3y^2 = 0$ (D) $x^2 - y^2 = 0$

18. Find the equation of the two straight lines which together with those given by the equation $6x^2 - xy - y^2 + x + 12y - 35 = 0$ will make a parallelogram whose diagonals intersect in the origin.
दो सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो दी गई रेखाओं $6x^2 - xy - y^2 + x + 12y - 35 = 0$ से समान्तर चतुर्भुज बनाती है जिसके विकर्ण मूल बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते है

(A*) $6x^2 - xy - y^2 - x - 12y - 35 = 0$
(B) $6x^2 - xy - y^2 - x - 12y + 35 = 0$
(C) $6x^2 - xy - y^2 - x + 12y - 35 = 0$
(D) $6x^2 - xy - y^2 + x - 12y - 35 = 0$

19. The curve passing through the points of intersection of $S_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ and

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents a pair of straight lines which are

(A*) equally inclined to the x - axis
(B) perpendicular to each other
(C) parallel to each other
(D) Not equally inclined to y-axis

$S_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ एवं $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरनें वाला वक्र एक सरल रेखा युग्म को प्रदर्शित करता है जो–

(A*) x-अक्ष से समान कोंण पर झुकी है।
(B) परस्पर लम्बवत है।
(C) एक दुसरे के समान्तर
(D) y-अक्ष से समान नहीं झुकी हुई है।

PART - II : SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

1. If the points $\left(\frac{a^3}{a-1}, \frac{a^2-3}{a-1}\right)$, $\left(\frac{b^3}{b-1}, \frac{b^2-3}{b-1}\right)$ and $\left(\frac{c^3}{c-1}, \frac{c^2-3}{c-1}\right)$ are collinear for three distinct values a, b, c and $a \neq 1$, $b \neq 1$ and $c \neq 1$, then find the value of $abc - (ab + bc + ac) + 3(a + b + c)$.
यदि बिन्दु $\left(\frac{a^3}{a-1}, \frac{a^2-3}{a-1}\right)$, $\left(\frac{b^3}{b-1}, \frac{b^2-3}{b-1}\right)$ तथा $\left(\frac{c^3}{c-1}, \frac{c^2-3}{c-1}\right)$ तीन भिन्न–भिन्न मानों a, b व c के लिये संरेखीय हो तथा $a \neq 1$, $b \neq 1$ व $c \neq 1$, तो $abc - (ab + bc + ac) + 3(a + b + c)$ का मान है

Ans. **0**

2. Find number of integral values of λ if $(\lambda, \lambda + 1)$ is an interior points of ΔABC, where $A \equiv (0, 3)$, $B \equiv (-2, 0)$ and $C \equiv (6, 1)$.
यदि बिन्दु $(\lambda, \lambda + 1)$ त्रिभुज ABC के अंदर स्थित हो जहाँ $A \equiv (0, 3)$, $B \equiv (-2, 0)$ व $C \equiv (6, 1)$ है, तो λ के पूर्णांक मानों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. **2**

3. Let ABC be a triangle such that the coordinates of the vertex A are (– 3, 1). Equation of the median through B is $2x + y - 3 = 0$ and equation of the angular bisector of C is $7x - 4y - 1 = 0$. Find the slope of line BC.
माना ABC एक त्रिभुज है जिसके शीर्ष A के निर्देशांक (– 3, 1) है। B से जाने वाली माध्यिका का समीकरण $2x + y - 3 = 0$ है और C के कोण अर्द्धक का समीकरण $7x - 4y - 1 = 0$ है तब रेखा BC की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

Ans. 18

4. A(3, 4), B(0, 0) and C(3, 0) are vertices of ΔABC. If 'P' is the point inside the ΔABC, such that $d(P, BC) \leq \min. \{d(P, AB), d(P, AC)\}$. Then the maximum of d (P, BC) is.
(where d(P, BC) represent distance between P and BC).
ΔABC के शीर्ष A(3, 4), B(0, 0) और C(3, 0) है। यदि ΔABC का आन्तरिक बिन्दु 'P' इस प्रकार है कि $d(P, BC) \leq \min. \{d(P, AB), d(P, AC)\}$ तब d (P, BC) का अधिकतम मान है
(जहाँ d(P, BC), P और BC के मध्य दूरी को व्यक्त करता है।).

Ans. 1

5. Drawn from the origin are two mutually perpendicular straight lines forming an isosceles triangle together with the straight line $2x + y = 5$. Then find the area of the triangle.

मूल बिन्दु से दो परस्पर लम्बवत् सरल रेखाएँ, सरल रेखा $2x + y = 5$ के साथ समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हुए खींची जाती है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है –

Ans. **5**

6. On the straight line $y = x + 2$, a point (a, b) is such that the sum of the square of distances from the straight lines $3x - 4y + 8 = 0$ and $3x - y - 1 = 0$ is least, then find value of $11(a + b)$.
सरल रेखा $y = x + 2$ पर एक बिन्दु (a, b) इस प्रकार है कि बिन्दु की रेखाओं $3x - 4y + 8 = 0$ और $3x - y - 1 = 0$ से दुरियों के वर्गो का योगफल न्यूनतम है तब $11(a + b)$ का मान ज्ञात कीजिए.

Ans. **52**

7. Parallelogram ABCD is cut by $(2n - 1)$ number of parallel lines in which one is diagnal AC. Distance between any two nearest lines is same which is also equal to distance of B, D from respective nearest line anong these. Ratio of area of smallest triangle so formed to area of parallelogram is $\frac{1}{32}$. Find n.

समान्तर चतुर्भुज ABCD को $(2n - 1)$ समान्तर रेखाओं से काटा जाता है जिसमें से एक रेखा विकर्ण AC है। दो नजदीक रेखाओं के मध्य दुरी बराबर है तथा B, D इस रेखाओं मे से नजदीक रेखा की दुरी के बराबर है इस प्रकार बने सबसे छोटे त्रिभुज का समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का अनुपात $\frac{1}{32}$ है तब n ज्ञात कीजिए।

8. A is a variable point on x-axis and B(0,b) is a fixied point. A equilateral triangle ABC is completed with vertex C away from origin. If the locus of the point C is $\alpha x + \beta y = b$, then $\alpha^2 + \beta^2$ is
एक चर बिन्दु A, x अंक्ष B(0,b) नियत बिन्दु है एक समबाहु त्रिभुज ABC , मूल बिन्दु से दूर शीर्ष C के द्वारा पूर्ण किया जाता है। यदि बिन्दु C का बिन्दुपथ $\alpha x + \beta y = b$ हो तो
$\alpha^2 + \beta^2$ का मान है –

Ans. **4**

9. Two lines (L_1 and L_2) are drawn from point (α, α) making an angle 45^0 with the lines $L_3 \equiv x + y - f(\alpha) = 0$ and $L_4 \equiv x + y + f(\alpha) = 0$. L_1 intersects L_3 and L_4 at A and B and L_2 intersects L_3 and L_4 at C and D respectively ($|2\alpha| > |f(\alpha)|$). If the area of trapezium ABDC is independent of α. if $f(\alpha) = \lambda\alpha^q$, where λ is a constant, then $|q|$ is
दो रेखाऐं (L_1 और L_2) बिन्दु (α, α) से खीचीं है जो रेखाओं $L_3 \equiv x + y - f(\alpha) = 0$ और $L_4 \equiv x + y + f(\alpha) = 0$. L_1 के साथ 45^0 का कोण बनातीहै। रेखा L_3 और L_4 को A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है तथा L_2 रेखा L_3 और L_4 को क्रमशः C और D पर प्रतिच्छेद करती है ($|2\alpha| > |f(\alpha)|$) समलम्ब चतुर्भज ABDC का क्षेत्रफल α से स्वंतत्र है तथा $f(\alpha) = \lambda\alpha^q$ हो तो $|q|$ का मान है –

Ans. 1

10. The portion of the line $ax + by - 1 = 0$, intercepted between the lines $ax + y + 1 = 0$ and $x + by = 0$ subtends a right angle at the origin and the condition in a and b is $\lambda a + b + b^2 = 0$, then find value of λ.
रेखाओं $ax + y + 1 = 0$ और $x + by = 0$ के मध्य अन्तखण्डित रेखा $ax + by - 1 = 0$ का भाग मूल बिन्दु पर समकोण बनाती है तथा a और b में प्रतिबन्ध $\lambda a + b + b^2 = 0$ है तब λ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **2**

11. If the straight lines joining the origin and the points of intersection of the curve $5x^2 + 12xy - 6y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ and $x + ky - 1 = 0$ are equally inclined to the x-axis, then find the value of $|k|$.

वक्र $5x^2 + 12xy - 6y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ एवं रेखा $x + ky - 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली सरल रेखाएँ x-अक्ष से समान कोण पर झुकी हुई हो, तो $|k|$ का मान है–

Ans. **1**

12. If the points of intersection of curves $C_1 = 4y^2 - \lambda x^2 - 2xy - 9x + 3$ and $C_2 = 2x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x - 1$ subtends a right angle at origin, then find the the value of λ.

यदि वक्रों $C_1 = 4y^2 - \lambda x^2 - 2xy - 9x + 3$ एवं $C_2 = 2x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x - 1$ के प्रतिच्छेद बिन्दु मूल बिन्दु पर समकोण आन्तरित करते हैं, तो λ का मान है :

Ans. **19**

13. A parallelogram is formed by the lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and the lines through (p, q) parallel to them and the equation of the diagonal of the parallelogram which doesn't pass through origin is $(\lambda x - p)(ap + hq) + (\mu y - q)(hp + bq) = 0$, then find the value of $\lambda^3 + \mu^3$.

रेखाओं $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा एक समान्तर चतुर्भुज बनाया जाता है तथा (p, q) से गुजरनें वाली रेखाऐं उनके समान्तर है। इस समान्तर चतुर्भुज के मूल बिन्दु से नहीं गुजरनें वाले विकर्ण का समीकरण $(\lambda x - p)(ap + hq) + (\mu y - q)(hp + bq) = 0$, तब $\lambda^3 + \mu^3$ का मान है–

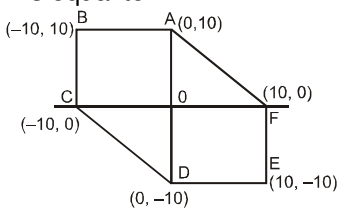
Ans. **16**

14. The equation $9x^3 + 9x^2 y - 45x^2 = 4y^3 + 4xy^2 - 20y^2$ represents 3 straight lines, two of which passes through origin. Then find the area of the triangle formed by these lines

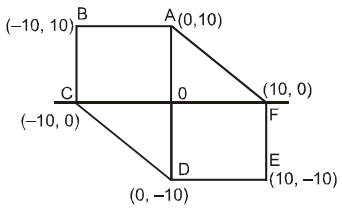
समीकरण $9x^3 + 9x^2 y - 45x^2 = 4y^3 + 4xy^2 - 20y^2$ तीन सरल रेखाओं को प्रदर्शित करता है जिसमे से दो रेखाऐं मूल बिन्दु से गुजरती है। तब उन सरल रेखाओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है–

Ans. **30**

15. Let the integral points inside or on the boundary of region bounded by straight lines as shown in figure is equal to k, then $\sqrt{k-7}$ is equal to



चित्र में दर्शायेनुसार सरल रेखाओं से परिबद्व क्षेत्र में अथवा रेखाओं पर स्थित पूर्णांक बिन्दुओं की संख्या k के बराबर है तब $\sqrt{k-7}$ बराबर है–



Ans. 18

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. Point P(2, 3) lies on the line $4x + 3y = 17$. Then find the co-ordinates of points farthest from the line which are at 5 units distance from the P.
बिन्दु P(2, 3) रेखा $4x + 3y = 17$ पर स्थित है तब बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो P से 5 इकाई दूरी पर स्थित है तथा इस रेखा से अधिकतम दुरी पर है।
(A*) (6, 6) (B) (6, –6) (C) (2, 0) (D*) (–2, 0)

2. Find the equation of the line passing through the point (2, 3) & making intercept of length 2 units between the lines $y + 2x = 3$ & $y + 2x = 5$.
बिन्दु (2, 3) से गुजरने वाली तथा रेखाओं $y + 2x = 3$ तथा $y + 2x = 5$ के मध्य 2 ईकाई का अंतःखण्ड बनाने वाली रेखा की समीकरण है–
(A) $3x - 4y = 18$ (B*) $x = 2$ (C*) $3x + 4y = 18$ (D) $x + 2 = 0$

3. In a triangle ABC, co-ordinates of A are (1, 2) and the equations to the medians through B and C are $x + y = 5$ and $x = 4$ respectively. Then the co-ordinates of B and C will be
एक त्रिभुज ABC में शीर्ष A के निर्देशांक (1, 2) तथा B एवं C से जाने वाली माध्यिकाँऐ क्रमशः $x + y = 5$ तथा $x = 4$ है, तो B व C के निर्देशांक होंगे –
(A) (– 2, 7), (4, 3) (B*) (7, – 2), (4, 3) (C) (2, 7), (– 4, 3) (D) (2, – 7), (3, – 4)

4. A is a point on either of two rays $y + \sqrt{3}\,|x| = 2$ at a distance of $\frac{4}{\sqrt{3}}$ units from their point of intersection. The co–ordinates of the foot of perpendicular from A on the bisector of the angle between them is/are
$y + \sqrt{3}\,|x| = 2$ द्वारा प्रदर्शित दो किरणों में से किसी किरण पर उनके प्रतिच्छेद बिन्दु से $\frac{4}{\sqrt{3}}$ दूरी पर बिन्दु A स्थित है। इन किरणों के मध्य के कोण अर्द्धक पर A से डाले गए लम्ब के पाद के निर्देशांक है –
(A) $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$ (B*) (0, 0) (C) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$ (D) (0, 4)

5. If one side of a square is parallel to $3x - 4y = 0$ & its area being 16 while centre being (1, 1), then find equation of sides of square.
यदि वर्ग की एक भुजा, रेखा $3x - 4y = 0$ के समान्तर तथा इसका क्षेत्रफल 16 है। जबकि केन्द्र (1, 1) है। तब वर्ग की भुजाओं के समीकरण है–
(A*) $3x - 4y + 11 = 0$ (B*) $3x - 4y - 9 = 0$ (C*) $4x + 3y + 3 = 0$ (D*) $4x + 3y - 17 = 0$

6. Find the equations of the sides of a triangle having (4, –1) as a vertex, if the lines $x - 1 = 0$ and $x - y - 1 = 0$ are the equations of two internal bisectors of its angles.

उस त्रिभुज की भुजाओं की समीकरण ज्ञात कीजिऐ जिसका एक शीर्ष (4, –1) है तथा जिसके दो आंतरिक कोण समद्विभाजकों की समीकरणें $x - 1 = 0$ तथा $x - y - 1 = 0$ है।
(A*) $2x - y + 3 = 0$ (B) $x + 2y - 6 = 0$ (C*) $2x + y - 7 = 0$ (D*) $x - 2y - 6 = 0$

7. A straight line L with negative slope passes through the point (8, 2) and cuts the positive coordinate axes at points P and Q, then the correct statement(s) among the following is/are (O is origin)
(A) The absolute minimum value of OP + OQ, where O is origin is $18\sqrt{2}$
(B*) Minimum area of ΔOPQ is 32
(C*) The absolute minimum value of OP + OQ, where O is origin is 18
(D*) Area of ΔOPQ is minimum for slope $\left(\frac{-1}{4}\right)$.

ऋणात्मक प्रवणता की एक सरल रेखा L बिन्दु (8, 2) से गुजरती है तथा धनात्मक निर्देशांक अक्षों को P तथा Q पर काटती है। तब निम्न में से कौनसे सही कथन है (जहाँ O मूल बिन्दु है।)

(A) OP + OQ का न्यूनतम निरपेक्ष मान $18\sqrt{2}$ है जहाँ O मूलबिन्दु है।

(B*) ΔOPQ का न्यूनतम क्षेत्रफल 32 है।

(C*) OP + OQ का निरपेक्ष मान 18 है जहाँ O मूलबिन्दु है।

(D*) ΔOPQ के क्षेत्रफल न्यूनतम के लिए प्रवणता $\left(\frac{-1}{4}\right)$ है।

8. The equation of the diagonals of a rectangle are $y + 8x - 17 = 0$ and $y - 8x + 7 = 0$. If the area of the rectangle is 8 sq. units, find the equation of the sides of the rectangle.

आयत के विकर्णो की समीकरण $y + 8x - 17 = 0$ और $y - 8x + 7 = 0$ है। यदि आयत का क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई है तो आयत की भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

(A*) y = 1 (B*) y = 9 (C*) x = 1 (D*) x = 2.

9. Two adjacent sides of a rhombus are $2x + 3y = a - 5$ and $3x + 2y = 4 - 2a$ and its diagonals intersect at the point (1, 2), then a can be –

समचतुर्भुज की दो आसन्न भुजाऐं $2x + 3y = a - 5$ और $3x + 2y = 4 - 2a$ है तथा इसके विकर्ण बिन्दु (1, 2), पर प्रतिच्छेद करते है तब a हो सकता है

(A*) – 16 (B) 16 (C) $-\frac{10}{3}$ (D*) $\frac{10}{3}$

10. A line $L_1 \equiv 3y - 2x - 6 = 0$ is rotated about its point of intersection with y–axis in clockwise direction to make it L_2 such that the area formed by L_1, L_2, x–axis and line x = 5 is $\frac{49}{3}$ sq units if its point of intersection with x = 5 lies below x–axis then points lying on the equation of L_2 are

एक रेखा $L_1 \equiv 3y - 2x - 6 = 0$ को y–अक्ष को इसके प्रतिच्छेद बिन्दु के सापेक्ष दक्षिणावर्त्त दिशा के सापेक्ष घुमाया जाता है। जो इसे L_2 रेखा की दिशा में है इस प्रकार है कि L_1, L_2, x–अक्ष और रेखा x = 5 से परिबद्ध क्षेत्रफल $\frac{49}{3}$ वर्ग ईकाई है यदि इसके x = 5 के साथ प्रतिच्छेद बिन्दु, x–अंक्ष के नीचे स्थित है तब L_2 रेखा के समीकरण पर स्थित बिन्दु है।

(A*) (3, – 1) (B) (4,2) (C*) (1,1) (D) (3,3)

11. Let $D(x_4, y_4)$ be a point such that ABCD is a square & M & P are the midpoints of the sides BC & CD respectively, then

(A*) Ratio of the areas of ΔAMP and the square is 3 : 8

(B) Ratio of the areas of ΔMCP & ΔAMD is 1 : 1

(C*) Ratio of the areas of ΔABM & ΔADP is 1 : 1

(D) Ratio of the areas of the quandrilateral AMCP and the square is 1 : 3

माना $D(x_4, y_4)$ कोई बिन्दु इस प्रकार है कि ABCD एक वर्ग है और M तथा P, क्रमशः भुजाओं BC तथा CD के मध्य बिन्दु है, तो

(A*) ΔAMP एवं वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात 3 : 8 होगा।

(B) ΔMCP तथा ΔAMD के क्षेत्रफलों का अनुपात 1 : 1 होगा।

(C*) ΔABM एवं ΔADP के क्षेत्रफलों का अनुपात 1 : 1 होगा।

(D) चतुर्भुज AMCP एवं वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात 1 : 3 होगा।

12. The equations of perpendicular of the sides AB & AC of Δ ABC are $x - y - 4 = 0$ and $2x - y - 5 = 0$ respectively. If the vertex A is $(-2, 3)$ and circumcenter is $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, then which of the following is true.
(A) equation of median of side AB is $x - y + 1 = 0$
(B) centroid of triangle ABC is (3, 1)
(C*) vertex C is (4, 0)
(D) Area of triangle ABC is 12.
त्रिभुज ABC की भुजाओं AB व AC के लम्बवत् रेखाओं के समीकरण क्रमशः $x - y - 4 = 0$ तथा $2x - y - 5 = 0$ है। यदि शीर्ष $A(-2, 3)$ हो तथा लम्ब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिन्दु $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ हो तो निम्न में से कौनसे सही है–
(A) भुजा AB की माध्यिका का समीकरण $x - y + 1 = 0$ है।
(B) त्रिभुज ABC का केन्द्रक (3, 1) है।
(C*) शीर्ष C (4, 0) है।
(D) ΔABC का क्षेत्रफल 12 है।.

13. Triangle ABC lies in the cartesian plane and has an area of 70 sq. units. The coordinates of B and C are (12, 19) and (23, 20) respecitvely and the coordinates of A are (p, q). The median to the side BC has slope – 5, then which can be corrected.
कार्तीय समतल में त्रिभुज ABC स्थित है जिसका क्षेत्रफल 70 वर्ग इकाई है। B तथा C के निर्देशांक क्रमशः (12, 19) और (23, 20) है और A के निर्देशांक (p, q) है तब भुजा BC की माध्यिका की प्रवणता – 5 है। तब निम्न में से कौनसे सही है–
(A*) $p + q = 47$ (B*) $p + q = 27$ (C) $p - q = 17$ (D*) $p - q = 13$

14. All the points lying on or inside the triangle formed by the points (1, 3), (5, 6) and (–1, 2) satisfy
वह सभी बिन्दु (x, y) जो बिन्दुओं (1, 3), (5, 6) तथा (–1, 2) से बनने वाले त्रिभुज पर या त्रिभुज के अन्दर स्थित है, निम्न सम्बन्ध को संतुष्ट करेंगे–
(A*) $3x + 2y \geq 0$ (B*) $2x + y + 1 \geq 0$ (C) $2x + 3y - 12 \geq 0$ (D*) $2x + 11 \geq 0$

15. $A \equiv (4, 2)$ and $B \equiv (2, 4)$ are two given points and a point P on the line $3x + 2y + 10 = 0$ is given then which of the following is/are true.
(A*) (PA + PB) is minimum when $P\left(\frac{-14}{5}, \frac{-4}{5}\right)$
(B) (PA + PB) is maximum when $P\left(\frac{-14}{5}, \frac{-4}{5}\right)$
(C*) $|PA - PB|$ is maximum when P(– 22, 28)
(D) (PA – PB) is minimum when P(– 22, 28).

$A \equiv (4, 2)$ और $B \equiv (2, 4)$ दो दिए गए बिन्दु है तथा बिन्दु P रेखा $3x + 2y + 10 = 0$ पर स्थित है तब निम्न में से कौनसे सत्य है–
(A*) (PA + PB) न्यूनतम है जब $P\left(\frac{-14}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ (B) (PA + PB) अधिकतम है जब $P\left(\frac{-14}{5}, \frac{-4}{5}\right)$
(C*) $|PA - PB|$ अधिकतम है जब P(– 22, 28) (D) (PA – PB) न्यूनतम है जब P(– 22, 28).

Ans. (i) $\left(-\frac{14}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ (ii) (–22, 28)

16. A line passing through $P = (\sqrt{3}, 0)$ and making an angle of 60° with positive direction of x-axis cuts the parabola $y^2 = x + 2$ at A and B, then :

एक सरल रेखा बिन्दु P = $(\sqrt{3}, 0)$ से गुजरती है और धनात्मक x-अक्ष से 60° का कोण बनाती है जो परवलय $y^2 = x + 2$ को बिन्दु A व B पर काटती है, तो :

(A) $PA + PB = \frac{2}{3}$ (B*) $|PA - PB| = \frac{2}{3}$

(C*) $(PA)(PB) = \frac{4(2+\sqrt{3})}{3}$ (D) $\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

17. Let $u \equiv ax + by + a\sqrt[3]{b} = 0$, $v \equiv bx - ay + b\sqrt[3]{b} = 0$, where $a, b \in R$ be two straight lines, then find the equations of the bisectors of the angles formed by $k_1u - k_2v = 0$ & $k_1u + k_2v = 0$ for non zero real k_1 & k_2 are :

माना दो रेखाएँ $u \equiv ax + by + a\sqrt[3]{b} = 0$ एवं $v \equiv bx - ay + b\sqrt[3]{b} = 0$, जहाँ $a, b \in R$ है। अशून्य वास्तविक संख्याओं k_1 एवं k_2 के लिए $k_1u - k_2v = 0$ एवं $k_1u + k_2v = 0$ से बने कोणों के अर्धकों के समीकरण है –

(A*) $u = 0$ (B) $k_2u + k_1v = 0$ (C) $k_2u - k_1v = 0$ (D*) $v = 0$

18. The sides of a triangle are the straight line $x + y = 1$, $7y = x$ and $\sqrt{3}y + x = 0$. Then which of the following is an interior points of triangle ?

(A) circumcentre (B*) centroid (C*) incentre (D) orthocentre

एक त्रिभुज की भुजाओं की समीकरणें $x + y = 1$, $7y = x$ तथा $\sqrt{3}y + x = 0$ है, तो निम्न में से कौन सा (कौन–से) बिन्दु त्रिभुज के अन्दर स्थित है –

(A) परिकेन्द्र (B*) केन्द्रक (C*) अन्तःकेन्द्र (D) लम्बकेंद्र

19. The line 'ℓ_1' passing through the point (1, 1) and the 'ℓ_2' passes through the point (– 1, 1). If the difference of the slope of lines is 2. Find the locus of the point of intersection of the ℓ_1 and ℓ_2.

रेखा 'ℓ_1', बिन्दु (1, 1) से गुजरती है तथा रेखा 'ℓ_2' बिन्दु (– 1, 1) से गुजरती है यदि रेखाओं की प्रवणताओं का अन्तर 2 है तब ℓ_1 और ℓ_2 के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

(A*) $x^2 = y$ (B*) $y = 2 - x^2$ (C) $y^2 = x$ (D) $x = 2 - y^2$

20. The two lines pairs $y^2 - 4y + 3 = 0$ and $x^2 + 4xy + 4y^2 - 5x - 10y + 4 = 0$ enclose a 4 sided convex polygon, then the correct statement among the following is/are

(A*) Area of polygon is 6 (B*) Length of its diagonals are $\sqrt{5}$ & $\sqrt{53}$

(C) Point of intersection of diagonals is (– 2, 2) (D*) Polygon is parallelogram.

दो रेखाओ के युग्म $y^2 - 4y + 3 = 0$ और $x^2 + 4xy + 4y^2 - 5x - 10y + 4 = 0$, चार भुजाओं के उत्तल बहुभुज का निर्माण करते है तब निम्न में से कौनसा कथन सही है।

(A*) बहुभुज का क्षेत्रफल 6 है। (B*) इसके विकर्णो की लम्बाई $\sqrt{5}$ और $\sqrt{53}$ है।

(C) विकर्णो के प्रतिच्छेद बिन्दु (– 2, 2) है। (D*) बहुभुज समान्तर चतुर्भुज है।

21. If the distance between the lines represented $9x^2 - 24xy + 16y^2 + k(6x - 8y) = 0$ is 4, then k may be

यदि $9x^2 - 24xy + 16y^2 + k(6x - 8y) = 0$ से निरूपित रेखाओं के मध्य दुरी 4 है तब k हो सकता है–

(A) 3 (B*) 10 (C*) –10 (D) 7

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

Comprehenssion # 1 (Q. NO. 1 to 3)

Let ABC be an acute angled triangle and AD, BE and CF are its medians, where E and F are the points (3, 4) and (1, 2) respectively and centroid of Δ ABC is G(3, 2), then answer the following questions :

1. The equation of side AB is

(A*) $2x + y = 4$ (B) $x + y - 3 = 0$ (C) $4x - 2y = 0$ (D) none of these

2. Co-ordinates of D are
(A) (7, –4) (B*) (5, 0) (C) (7, 4) (D) (– 3, 0)

3. Height of altitude drawn from point A is (in units)
(A) $4\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C*) $6\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$

अनुच्छेद # 1 (Q. No. 1 to 3)

मानाकि ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है तथा AD, BE तथा CF इसकी माध्यिकाएँ है जहाँ E तथा F क्रमशः बिन्दु (3, 4) और (1, 2) है तथा त्रिभुज ABC का केन्द्रक G(3, 2) है, तो निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. भुजा AB का समीकरण है –
(A*) 2x + y = 4 (B) x + y – 3 = 0 (C) 4x – 2y = 0 (D) इनमें से कोई नहीं

2. D के निर्देशांक है –
(A) (7, –4) (B*) (5, 0) (C) (7, 4) (D) (– 3, 0)

3. बिन्दु A से डाले गये शीर्षाभिलम्ब की ऊँचाई (इकाई में) है –
(A) $4\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C*) $6\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$

Comprehension # 2 (Q. No. 4 to 6)

Given two straight lines AB and AC whose equations are 3x + 4y = 5 and 4x – 3y = 15 respectively. Then the possible equation of line BC through (1, 2), such that ΔABC is isosceles, is $L_1 = 0$ or $L_2 = 0$, then answer the following questions

4. If $L_1 \equiv ax + by + c = 0$ & $L_2 \equiv dx + ey + f = 0$ where a, b, c, d, e, f $\in$ I, and a, b, d, f > 0 and HCF(a, b) = HCF(d, f) = 1, then c + f =

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D*) 4

5. A straight line through P(2, c + f – 1), inclined at an angle of 60° with positive Y-axis in clockwise direction. The co-ordinates of one of the points on it at a distance (c + f) units from point P is (c, f obtained from previous question)
(A*) $(2 + 2\sqrt{3}, 5)$ (B) $(3 + 2\sqrt{3}, 3)$ (C) $(2 + 3\sqrt{3}, 4)$ (D) $(2 + 3\sqrt{3}, 3)$

6. If (a, b) is the co-ordinates of the point obtained in previous question, then the equation of line which is at the distance |b – 2a – 1| units from origin and make equal intercept on co-ordinate axes in first quadrant, is
(A) $x + y + 4\sqrt{6} = 0$ (B) $x + y + 2\sqrt{6} = 0$ (C*) $x + y - 4\sqrt{6} = 0$ (D) $x + y - 2\sqrt{6} = 0$

अनुच्छेद # 2 (Q. No. 4 to 6)

दो सरल रेखाएँ AB तथा AC जिनकी समीकरणें क्रमशः 3x + 4y = 5 और 4x – 3y = 15 है, तो बिन्दु (1, 2) से गुजरने वाली रेखा BC की सम्भावित समीकरण, जबकि ΔABC समद्विबाहु है, $L_1 = 0$ या $L_2 = 0$ है, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

4. यदि $L_1 \equiv ax + by + c = 0$ तथा $L_2 \equiv dx + ey + f = 0$ जहाँ a, b, c, d, e, f $\in$ I, तथा a, b, d, f > 0 व म.स.प. (a, b) = म.स.प. (d, f) = 1, तब c + f =
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D*) 4

5. एक सरल रेखा बिन्दु P(2, c + f – 1) से गुजरती है तथा धनात्मक y-अक्ष से दक्षिणावर्त दिशा में 60° का कोण बनाती है, तो इस रेखा पर बिन्दु P से (c + f) इकाई दूरी पर एक बिन्दु के निर्देशांक होगे। (c, f पुर्व प्रश्न से प्राप्त मान है)
(A*) $(2 + 2\sqrt{3}, 5)$ (B) $(3 + 2\sqrt{3}, 3)$
(C) $(2 + 3\sqrt{2}, 4)$ (D) $(2 + 3\sqrt{2}, 3)$

6. यदि उपरोक्त प्रश्न में प्राप्त बिन्दु के निर्देशांक (a, b) है, तो उस रेखा का समीकरण जो मूलबिन्दु से $|b - 2a - 1|$ इकाई दूरी पर है और प्रथम चतुर्थांश में निर्देशी अक्षों पर समान अन्तःखण्ड काटती हैं, है–

(A) $x + y + 4\sqrt{6} = 0$ (B) $x + y + 2\sqrt{6} = 0$ (C*) $x + y - 4\sqrt{6} = 0$ (D) $x + y - 2\sqrt{6} = 0$

Comprehension # 3 (Q.No. 7 to 9)

If vertices of triangle are $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$, then area of $\Delta PQR = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_1 & 1 \end{vmatrix}$ and if P, Q, R are collinear, then $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

On the basis of above answer the following question.

7. If $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ are the vertices of the triangle then find equation of median through A.

(A) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ (B*) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(C) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (D) None of these

8. If $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ are the vertices of the triangle then find equation of line through A and parallel to BC

(A*) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ (B) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(C) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (D) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$

9. If $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ are the vertices of the triangle then find the equation of internal angle bisector through A

(A) $b\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (B) $c\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(C*) $b\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (D) $c\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Hindi अनुच्छेद **# 3 (Q.No. 7 to 9)**

यदि त्रिभुज के शीर्ष $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$ तब ΔPQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_1 & 1 \end{vmatrix}$ और P, Q, R संरेख है तब $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. इस आधार पर निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए

7. यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज के शीर्ष है तब A से जाने वाली माध्यिका का समीकरण है–.

(A) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

(B*) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(C) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(D) इनमें से कोई नहीं।

8. यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज के तीन शीर्ष है तब A से जाने वाली BC के समान्तर रेखा का समीकरण है–

(A*) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ (B) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(C) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(D) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$

9. यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज के शीर्ष है तब A से जाने वाले आन्तरीक कोण अर्द्धक का समीकरण है–

(A) $b\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(B) $c\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(C*) $b\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (D) $c\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

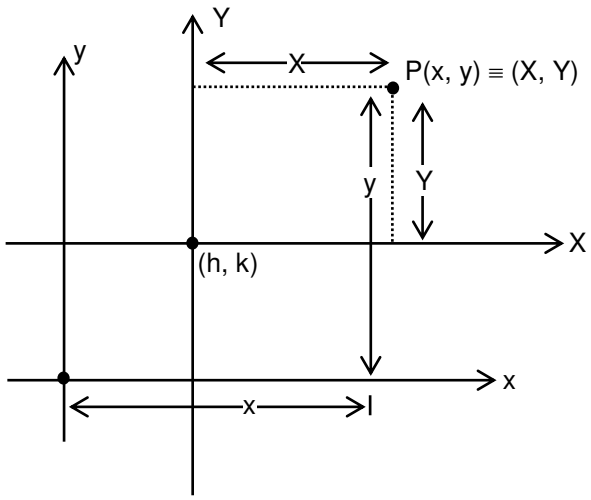
Comprehension (10 & 11)

Origin of coordinate system xy is shifted to (h, k) to make new coordinate system XY. X and Y are parallel to x and y. New co-ordinates of point P(x, y) are P(X, Y). x, y, X, Y are related as given below.

xy निर्देशांक पद्धति के मूल बिन्दु को (h, k) से स्थानान्तरित किया जाता है तथा नया निर्देशांक पद्धति XY बनायी जाती है। X और Y, x और y के समान्तर बिन्दु है P(x, y) के नये निर्देशांक P(X, Y) है। x, y, X, Y निम्न तरह से सम्बन्धित है

$X = x - h$

$Y = y - K$



10. Co-ordinates of (–7, 9) if origin is shifted to (2, 4) without changing direction of axes, are
(–7, 9) के निर्देशांक है यदि अक्षों की दिशा को परिवर्तित किए बिना मूल बिन्दु को (2, 4) से स्थानान्तरित किया जाता है।
(A) (–5,13) (B) (–7,4) (C*) (–9,5) (D) (–9,13)

11. If co-ordinate axes are so translated such that ordinate of (4, 12) becomes zero while abscissa remains same. Then new coordinates of point (–8, –2) are
यदि निर्देशांक अक्षों को इस प्रकार रूपान्तरित किया जाता है कि (4, 12) की कोटि शून्य हो जाती है जबकि भुज समान रहता है। बिन्दु (–8, –2) के नये निर्देशांक है –
(A) (–8, 14) (B) (–8, 10) (C*) (–8, –14) (D) (–8, –10)

Exercise-3

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

*** Marked Questions may have more than one correct option.**
*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

1. Let O(0, 0), P(3, 4), Q(6, 0) be the vertices of the triangle OPQ. The point R inside the triangle OPQ is such that the triangles OPR, PQR, OQR are of equal area. The co-ordinates of R are
[IIT-JEE - 2007, P-II, (3, – 1), 81]
माना कि O(0, 0), P(3, 4), Q(6, 0) त्रिभुज OPQ के शीर्षबिन्दु (vertices) हैं। R त्रिभुज OPQ का अंदर एक ऐसा बिन्दु है कि त्रिभुजों OPR, PQR, OQR के क्षेत्रफल बराबर है। R के निर्देशांक (co-ordinates) हैं –
[IIT-JEE - 2007, P-II, (3, – 1), 81]
(A) $\left(\frac{4}{3}, 3\right)$ (B) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ (C*) $\left(3, \frac{4}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

2. Lines $L_1 : y - x = 0$ and $L_2 : 2x + y = 0$ intersect the line $L_3 : y + 2 = 0$ at P and Q, respectively. The bisector of the acute angle between L_1 and L_2 intersects L_3 at R.
[IIT-JEE - 2007, P-II, (3, – 1), 81]

STATEMENT – 1 : The ratio PR : RQ equals $2\sqrt{2} : \sqrt{5}$.
because
STATEMENT – 2 : In any triangle, bisector of an angle divides the triangle into two similar triangles.
(A) Statement - 1 is True, Statement - 2 is True; Statement - 2 **is** a correct explanation for Statement - 1

(B) Statement - 1 is True, Statement - 2 is True; Statement - 2 is **NOT** a correct explanation for Statement - 1
(C*) Statement - 1 is True, Statement - 2 is False
(D) Statement - 1 is False, Statement - 2 is True

रेखायें $L_1 : y - x = 0$ तथा $L_2 : 2x + y = 0$ रेखा $L_3 : y + 2 = 0$ को क्रमशः P तथा Q पर काटती है। L_1 तथा L_2 के बीच के न्यूनकोण (acute angle) का समद्विभाजक (bisector) L_3 को R पर काटता है।

वक्तव्य - 1 : PR : RQ का अनुपात $2\sqrt{2} : \sqrt{5}$ है। **[IIT-JEE - 2007, P-II, (3, – 1), 81]**

क्योंकि

वक्तव्य - 2 : किसी भी त्रिभुज के एक कोण का समद्विभाजक त्रिभुज को दो समरूप (similar) त्रिभुजों में विभाजित करता है।

(A) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है; वक्तव्य-2 वक्तव्य-1 का सही स्पष्टीकरण हैं।
(B) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है; वक्तव्य-2 वक्तव्य-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं हैं।
(C) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 असत्य है।
(D) वक्तव्य-1 असत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है।

3. Consider three points **[IIT-JEE - 2008, P-II, (3, – 1), 81]**
$P = (-\sin(\beta - \alpha), -\cos\beta)$, $Q = (\cos(\beta - \alpha), \sin\beta)$ and $R = (\cos(\beta - \alpha + \theta), \sin(\beta - \theta))$, where $0 < \alpha, \beta, \theta < \frac{\pi}{4}$. Then,

(A) P lies on the line segment RQ
(B) Q lies on the line segment PR
(C) R lies on the line segment QP
(D*) P, Q, R are non-collinear

तीन बिन्दु लीजिये $P = (-\sin(\beta - \alpha), -\cos\beta)$, $Q = (\cos(\beta - \alpha), \sin\beta)$ तथा $R = (\cos(\beta - \alpha + \theta), \sin(\beta - \theta))$, जहाँ $0 < \alpha, \beta, \theta < \frac{\pi}{4}$ है। तो **[IIT-JEE - 2008, P-II, (3, – 1), 81]**

(A) P रेखाखण्ड RQ पर है
(B) Q रेखाखण्ड PR पर है
(C) R रेखाखण्ड QP पर है
(D) P, Q, R असंरेख हैं

4. The locus of the orthocentre of the triangle formed by the lines **[IIT-JEE - 2009,_Paper-2, (3, –1), 80]**
$(1 + p)x - py + p(1 + p) = 0$, $(1 + q)x - qy + q(1 + q) = 0$ and $y = 0$, where $p \neq q$, is

(A) a hyperbola
(B) a parabola
(C) an ellipse
(D*) a straight line

रेखाओं $(1 + p)x - py + p(1 + p) = 0$, $(1 + q)x - qy + q(1 + q) = 0$ एवं $y = 0$ जहाँ $p \neq q$ से बने त्रिभुज के लम्ब–केन्द्र का बिन्दुपथ है – **[IIT-JEE - 2009,_Paper-2, (3, –1), 80]**

(A) अतिपरवलय
(B) परवलय
(C) दीर्घवृत्त
(D) एक सरल रेखा

5. A straight line **L** through the point (3, –2) is inclined at an angle 60º to the line $\sqrt{3}x + y = 1$. If **L** also intersects the x-axis, then the equation of **L** is

एक सरल रेखा L बिन्दु (3, –2) से गुजरती है, और रेखा $\sqrt{3}x + y = 1$ से 60º कोण पर झुकी है। यदि L, x- अक्ष को भी प्रतिच्छेद करती है रेखा $y = 0$ को काटती है, तो L का समीकरण है **[IIT-JEE 2011, Paper-1, (3, –1), 80]**

(A) $y + \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3} = 0$
(B*) $y - \sqrt{3}x + 2 + 3\sqrt{3} = 0$
(C) $\sqrt{3}y - x + 3 + 2\sqrt{3} = 0$
(D) $\sqrt{3}y + x - 3 + 2\sqrt{3} = 0$

Ans. (B)

6. For $a > b > c > 0$, the distance between (1, 1) and the point of intersection of the lines $ax + by + c = 0$ and $bx + ay + c = 0$ is less than $2\sqrt{2}$. Then **[JEE (Advanced) 2013, Paper-1, (2, 0)/60]**

$a > b > c > 0$ के लिए (1, 1) तथा रेखाओं $ax + by + c = 0$ व $bx + ay + c = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु के बीच की दूरी $2\sqrt{2}$ से कम है, तब

(A) $a + b - c > 0$
(B) $a - b + c < 0$
(C) $a - b + c > 0$
(D) $a + b - c < 0$

7. For a point P in the plane, let $d_1(P)$ and $d_2(P)$ be the distance of the point P from the lines $x - y = 0$ and $x + y = 0$ respectively. The area of the region R consisting of all points P lying in the first quadrant of the plane and satisfying $2 \le d_1(P) + d_2(P) \le 4$, is

समतल में स्थित किसी बिन्दु P से रेखाओं $x - y = 0$ तथा $x + y = 0$ की दूरी क्रमशः $d_1(P)$ तथा $d_2(P)$ है। यदि क्षेत्र R उन सभी बिन्दुओं P से बना है जो प्रथम चतुर्थांश (quadrant) में स्थित है तथा $2 \le d_1(P) + d_2(P) \le 4$ को संतुष्ट करते है, तब क्षेत्र R का क्षेत्रफल है।

[JEE (Advanced) 2014, Paper-1, (3, 0)/60]

Ans. **(6)**

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. The lines $p(p^2 + 1)x - y + q = 0$ and $(p^2 + 1)^2 x + (p^2 + 1)y + 2q = 0$ are perpendicular to a common line for: **[AIEEE - 2009 (4, –1), 144]**

(1*) exactly one value of p
(2) exactly two values of p
(3) more than two values of p
(4) no value of p

सरल रेखाऐं $p(p^2 + 1)x - y + q = 0$ तथा $(p^2 + 1)^2 x + (p^2 + 1)y + 2q = 0$ किसी एक उभयनिष्ठ रेखा के लम्बवत है – **[AIEEE - 2009 (4, –1), 144]**

(1*) p के ठीक एक मान के लिये
(2) p के ठीक दो मानों के लिये
(3) p के दो से अधिक मानों के लिये
(4) p के किसी मान के लिये नही

2. Three distinct points A, B and C are given in the 2-dimensional coordinate plane such that the ratio of the distance of any one of them from the point (1, 0) to the distance from the point (–1, 0) is equal to $\frac{1}{3}$. Then the circumcentre of the triangle ABC is at the point : **[AIEEE - 2009 (4, –1), 144]**

द्विविम निर्देशी तल में तीन भिन्न बिन्दु A, B व C इस प्रकार है कि इनमें किसी भी बिन्दु की बिन्दुओं (1, 0) व (–1, 0) से दूरीयों का अनुपात $\frac{1}{3}$ है तो त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है – **[AIEEE - 2009 (4, –1), 144]**

(1*) $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$
(2) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
(3) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$
(4) 0, 0

3. The line L given by $\frac{x}{5} + \frac{y}{b} = 1$ passes through the point (13, 32). The line K is parallel to L and has the equation $\frac{x}{c} + \frac{y}{3} = 1$. Then the distance between L and K is **[AIEEE - 2010 (8, –2), 144]**

$\frac{x}{5} + \frac{y}{b} = 1$ द्वारा निरूपित रेखा L, बिन्दु (13, 32) से होकर जाती है। रेखा K, रेखा L के समान्तर है तथा उसका समीकरण $\frac{x}{c} + \frac{y}{3} = 1$ है। तो L तथा K के बीच की दूरी है– **[AIEEE - 2010 (8, –2), 144]**

(1) $\sqrt{17}$
(2) $\frac{17}{\sqrt{15}}$
(3*) $\frac{23}{\sqrt{17}}$
(4) $\frac{23}{\sqrt{15}}$

Ans. **(3)**

4. The line $L_1 : y - x = 0$ and $L_2 : 2x + y = 0$ intersect the line $L_3 : y + 2 = 0$ at P and Q respectively. The bisector of the acute angle between L_1 and L_2 intersects L_3 at R. **[AIEEE - 2011, I(4, –1), 120]**

Statement-1 : The ratio PR : RQ equals $2\sqrt{2} : \sqrt{5}$

Statement-2 : In any triangle, bisector of an angle divides the triangle into two similar triangles.

(1) Statement-1 is true, Statement-2 is true ; Statement-2 is correct explanation for Statement-1

(2) Statement-1 is true, Statement-2 is true ; Statement-2 is **not** a correct explanation for Statement-1

(3*) Statement-1 is true, Statement-2 is false

(4) Statement-1 is false, Statement-2 is true

रेखा $L_1 : y - x = 0$ तथा $L_2 : 2x + y = 0$, रेखा $L_3 : y + 2 = 0$ को क्रमशः P तथा Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। L_1 तथा L_2 के बीच का न्यून कोण समद्विभाजक L_3 को R पर काटता है। **[AIEEE - 2011, I(4, –1), 120]**

कथन-1 : अनुपात PR : RQ, $2\sqrt{2} : \sqrt{5}$ के बराबर है।

कथन-2 : किसी भी त्रिभुज में, एक कोण का समद्विभाजक त्रिभुज को दो समरूप त्रिभुजों में बांटता है।

(1) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है। कथन-2, कथन-1 की सही व्याख्या है।

(2) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है। कथन-2, कथन-1 की सही व्याख्या **नहीं** है।

(3*) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।

(4) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. The lines $x + y = |a|$ and $ax - y = 1$ intersect each other in the first quadrant. Then the set of all possible values of a is the interval : **[AIEEE - 2011, II(4, –1), 120]**

रेखाऐं $x + y = |a|$ तथा $ax - y = 1$ प्रथम चतुर्थांश में प्रतिच्छेद करती हैं तो a के सभी संभावित मानों का अन्तराल है : **[AIEEE - 2011, II(4, –1), 120]**

(1) $(0, \infty)$ (2*) $[1, \infty)$ (3) $(-1, \infty)$ (4) $(-1, 1]$

6. If A(2, –3) and B(–2, 1) are two vertices of a triangle and third vertex moves on the line $2x + 3y = 9$, then the locus of the centroid of the triangle is : **[AIEEE - 2011, II(4, –1), 120]**

यदि एक त्रिभुज के दो शीर्ष A(2, –3) तथा B(–2, 1) है तथा तीसरा शीर्ष रेखा $2x + 3y = 9$ पर गति (moves) करता है तो त्रिभुज के केन्द्रक का बिन्दुपथ है :

(1) $x - y = 1$ (2*) $2x + 3y = 1$ (3) $2x + 3y = 3$ (4) $2x - 3y = 1$

7. If the line $2x + y = k$ passes through the point which divides the line segment joining the points (1, 1) and (2, 4) in the ratio 3 : 2, then k equals : **[AIEEE-2012, (4, –1)/120]**

यदि रेखा $2x + y = k$ उस बिंदु से होकर जाती है, जो बिंदुओं (1, 1) तथा (2, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3 : 2 के अनुपात में बांटता है, तो k का मान है–

(1) $\frac{29}{5}$ (2) 5 (3*) 6 (4) $\frac{11}{5}$

8. A line is drawn through the point (1, 2) to meet the coordinate axes at P and Q such that it forms a triangle OPQ, where O is the origin. if the area of the triangle OPQ is least, then the slope of the line PQ is : **[AIEEE-2012, (4, –1)/120]**

बिंदु (1, 2) से होकर जाती एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि वह निर्देशांक अक्षों को P तथा Q पर प्रतिच्छेद कर त्रिभुज OPQ बनाती है, जहाँ O मूल बिंदु है। यदि त्रिभुज OPQ का क्षेत्रफल न्यूनतम है तो रेखा PQ की प्रवणता है :

(1) $-\frac{1}{4}$ (2) – 4 (3*) – 2 (4) $-\frac{1}{2}$

9. A ray of light along $x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$ gets reflected upon reaching x-axis, the equation of the reflected ray is

$x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$ की दिशा में जाती हुई एक प्रकाश की किरण x-अक्ष पर पहुँच कर परावर्तित हो जाती है। इस परावर्तित किरण का समीकरण है– **[AIEEE - 2013, (4, –1),360]**

(1) $y = x + \sqrt{3}$ (2*) $\sqrt{3}y = x - \sqrt{3}$ (3) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ (4) $\sqrt{3}y = x - 1$

10. The x-coordinate of the incentre of the triangle that has the coordinates of mid points of its sides as (0, 1) (1, 1) and (1, 0) is : **[AIEEE - 2013, (4, –1),360]**

एक त्रिभुज, जिसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (0, 1) (1, 1) तथा (1, 0) हैं, के अंतः केन्द्र का x-निर्देशांक है :

(1) $2 + \sqrt{2}$ (2*) $2 - \sqrt{2}$ (3) $1 + \sqrt{2}$ (4) $1 - \sqrt{2}$

[AIEEE - 2013, (4, –1),360]

11. Let PS be the median of the triangle with vertices P(2, 2), Q (6, – 1), and R (7, 3). The equation of the line passing through (1, – 1) and parallel to PS is : **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**

माना PS एक त्रिभुज की माध्यिका है जिसके शीर्ष P(2, 2), Q (6, – 1), तथा R (7, 3) है। (1, – 1) से होकर जाने वाली रेखा जो PS के समांतर है, का समीकरण है : **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**

(1) 4x + 7y + 3 = 0 (2) 2x – 9y – 11 = 0 (3) 4x – 7y – 11 = 0 (4*) 2x + 9y + 7 = 0

12. Let a, b, c and d be non-zero numbers. If the point of intersection of the lines 4ax + 2ay + c = 0 and 5bx + 2by + d = 0 lies in the fourth quadrant and is equidistant from the two axes then : **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**

माना a, b, c तथा d शून्येतर संख्याएँ है। यदि रेखाओं 4ax + 2ay + c = 0 तथा 5bx + 2by + d = 0 का प्रतिच्छेद बिंदु चौथे चतुर्थांश में है तथा दोनों अक्षों से समदूरस्थ है, तो : **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**

(1*) 3bc – 2ad = 0 (2) 3bc + 2ad = 0 (3) 2bc – 3ad = 0 (4) 2bc + 3ad = 0

13. The number of points, having both co-ordinates as integers, that lie in the interior of the triangle with vertices (0, 0), (0, 41) and (41, 0) is **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) 901 (2) 861 (3) 820 (4) 780

त्रिभुज, जिसके शीर्ष (0, 0), (0, 41) तथा (41, 0) हैं, के आंतरिक भाग में स्थित उन बिन्दुओं की संख्या जिनके दोनों निर्देशांक पूर्णांक है, है– **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) 901 (2) 861 (3) 820 (4*) 780

14. Two sides of a rhombus are along the lines, x – y + 1 = 0 and 7x – y – 5 = 0. if its diagonals intersect at (–1, –2), then which one of the following is a vertex of this rhombus ? **[JEE(Main) 2016, (4, – 1), 120]**

यदि एक समचतुर्भज की दो भुजाएँ, रेखाओं x – y + 1 = 0 तथा 7x –y –5 = 0 की दिशा में हैं तथा इसके विकर्ण बिंदु (–1, –2) पर प्रतिच्छेद करते है, तो इस समचतुर्भुज का निम्न में से कौन–सा शीर्ष है ?

(1) (–3, –8) (2*) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ (3) $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ (4) (–3, –9)

15. Let k be an integer such that the triangle with vertices (k, –3k), (5, k) and (–k, 2) has area 28 sq. units. Then the orthocentre of this triangle is at the point : **[JEE(Main) 2017, (4, – 1), 120]**

माना k एक ऐसा पूर्णांक है कि त्रिभुज, जिसके शीर्ष (k, –3k), (5, k) तथा (–k, 2) है का क्षेत्रफल 28 वर्ग इकाई है, तो त्रिभुज के लंबकेन्द्र जिस बिंदु पर है, वह है: **[JEE(Main) 2017, (4, – 1), 120]**

(1) $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ (2) $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ (3) $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ (4*) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

16. A straight line through a fixed point (2,3) intersects the coordinate axes at distinct points P and Q. If O is the origin and the rectangle OPRQ is completed, then the locus of R is

एक सरल रेखा, जो एक अचर बिन्दु (2,3) से होकर जाती है, निर्देशांक अक्षों को दो विभिन्न बिन्दुओं P तथा Q पर प्रतिच्छेद करती है। यदि O मूल बिन्दु है तथा आयत OPRQ को पूरा किया जाता है तो R का बिन्दुपथ है :

Straight Line [JEE(Main) 2018, (4, – 1), 120]

(1*) $3x + 2y = xy$ (2) $3x + 2y = 6xy$ (3) $3x + 2y = 6$ (4) $2x + 3y = xy$

17. Consider the set all lines $px + qy + r = 0$ such that $3p + 2q + 4r = 0$. Which one of the following statements is true ? **[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) The lines are not concurrent

(2) The lines are all parallel

(3*) The lines are concurrent at the point $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(4) Each the line passes through the origin.

ऐसी सभी रेखाओं $px + qy + r = 0$ के समुच्चय पर विचार कीजिए जिनके लिए $3p + 2q + 4r = 0$ है, तो निम्न में से कौन–सा एक कथन सत्य है ?

(1) रेखाएं संगामी नहीं है।

(2) सभी रेखाएँ समांतर हैं।

(3) रेखाएँ बिन्दु $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ पर संगामी हैं।

(4) प्रत्येक रेखा मूल बिंदु से होकर जाती हैं।

18. Let the equations of two sides of a triangle be $3x - 2y + 6 = 0$ and $4x + 5y - 20 = 0$. If the orthocentre of this triangle is at (1, 1), then the equation of its third side is :

मना एक त्रिभुज की दो भुजाओं के समीकरण $3x - 2y + 6 = 0$ तथा $4x + 5y - 20 = 0$ है। तथा इस त्रिभुज का लंबकेंद्र (1, 1) पर हैं, तो इसकी तीसरी भुजा का समीकरण है : **[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19),P-2 (4, – 1), 120]**

(1*) $26x - 122y - 1675 = 0$ (2) $26x + 61y + 1675 = 0$

(3) $122y - 26x - 1675 = 0$ (4) $122y + 26x + 1675 = 0$

19. Two vertices of a triangle are (0, 2) and (4, 3). If its orthocentre is at the origin, then its third vertex lies in which quadrant ?

(1) third (2) second (3) first (4) fourth

एक त्रिभुज के दो शीर्ष (0, 2) तथा (4, 3) है। यदि इसका लंबकेद्र मूलबिन्दु पर है, तो इसका तीसरा शीर्ष किस चतुर्थांश में है? **[JEE(Main) 2019, Online (10-01-19),P-2 (4, – 1), 120]**

(1) तीसरा (2) दूसरा (3) प्रथम (4) चौथा

Ans. **(2)**

Answers

EXERCISE - 1

EXERCISE - 2

EXERCISE - 3

High Level Problems (HLP)

Marked Questions may have for Revision Questions.
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

1. The vertices of a triangle OBC are O(0,0) B(–3,–1) and C(–1,–3). Find the equation of line parallel to BC and intersecting the sides OB and OC, whose perpendicular distance from the point (0,0) is $\frac{1}{2}$.
ΔOBC के शीर्ष O(0,0), B(–3,–1) तथा C(–1,–3) है। BC के समान्तर उस सरल रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो भुजाओं OB व OC को प्रतिच्छेद करती है तथा जिसकी O(0,0) से लम्बवत् दूरी $\frac{1}{2}$ है–

Ans. $x + y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$

2. A variable line, drawn through the point of intersection of the straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ and $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$, meets the coordinate axes in A & B. Show that the locus of the mid point of AB is the curve $2xy(a + b) = ab(x + y)$.
सरल रेखाओं $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ एवं $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$, के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली एक चर रेखा, निर्देशी अक्षों को क्रमशः A एवं B पर मिलती है। प्रदर्शित कीजिए कि AB के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ $2xy(a + b) = ab(x + y)$ है।

3. From the vertices A, B, C of a triangle ABC, perpendiculars AD, BE, CF are drawn to any straight line. Show that the perpendiculars from D, E, F to BC, CA, AB respectively are concurrent.
त्रिभुज ABC के शीर्ष A,B,C से लम्ब AD, BE, CF किसी सरल रेखा पर खीचें जाते है। दर्शाइयें कि D, E, F से लम्ब BC, CA और AB क्रमश : संगामी है।

4. A triangle is formed by the lines whose equations are AB : $x + y - 5 = 0$, BC : $x + 7y - 7 = 0$ and CA : $7x + y + 14 = 0$. Find the bisector of the interior angle at B and the exterior angle at C. Determine the nature of the interior angle at A and find the equation of the bisector.
रेखाओं AB : $x + y - 5 = 0$, BC : $x + 7y - 7 = 0$ एवं CA : $7x + y + 14 = 0$ से त्रिभुज बनाया जाता है। कोण B के अन्तः समद्विभाजक एवं कोण C के बाह्य समद्विभाजक की समीकरण ज्ञात कीजिए। अन्तः कोण A की प्रकृति ज्ञात कीजिए एवं इसके समद्विभाजक की समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $3x + 6y - 16 = 0$; $8x + 8y + 7 = 0$; $12x + 6y - 11 = 0$

5. The coordinates of the feet of $\perp$ from the vertices of a Δ on the opposite sides are (20, 25), (8, 16) and (8, 9). Then find the coordinates of a vertices of the Δ
किसी त्रिभुज के शीर्षों से सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्बपाद के निर्देशांक (20, 25), (8, 16) एवं (8, 9) है, तो त्रिभुज के किसी शीर्ष के निर्देशांक है–

Ans. (5, 10). (50, – 5), (15, 30)

6. Let P is any point inside the triangle ABC of side lengths 6, 5, 5 units and p_1, p_2, p_3 be the lengths of perpendiculars drawn from P to the sides of triangle. Find the maximum value of $p_1.p_2.p_3$.

Ans. $p_1p_2p_3 \le \frac{256}{75}$

माना लम्बाईयाँ 6, 5, 5 ईकाई की भुजाओं से बने ΔABC के अन्दर है तथा p_1, p_2, p_3 , P से त्रिभुज की भुजाओं पर डाले गए लम्बों की लम्बाईयां है। $p_1.p_2.p_3$ का अधिकतम मान है –

Ans. $p_1p_2p_3 \le \frac{256}{75}$

7. Let in ΔPAB, A is (0, 0), B is (a, 0) and P is variable such that $\angle PBA$ is equal to three times $\angle PAB$ the, find the locus of P.

Ans. $4x^3 - 4xy^2 - 3ax^2 + ay^2 = 0$.

मानाकि ΔPAB में A(0, 0), B(a, 0) है। तथा P एक चर रेखा है जो कि इस प्रकार है कि $\angle PBA$ का मान $\angle PAB$ के मान का तीन गुने के बराबर है तब बिन्दु P का बिन्दुपथ है।

Ans. $4x^3 - 4xy^2 - 3ax^2 + ay^2 = 0$.

8. Through a fixed point any straight line is drawn meeting two given parallel straight lines in P and Q, through P and Q straight lines are drawn in fixed directions, meeting in R. Prove that the locus of R is straight line.

स्थिर बिन्दु से कोई सरल रेखा खीचीं जाती है जो दी गई दो समान्तर सरल रेखाओं को P तथा Q पर मिलती है, P और Q से सरल रेखाऐ एक निश्चित दिशा में खीचीं जाती है, जो R पर मिलती है, दर्शाइये कि R का बिन्दुपथ एक सरल रेखा है।

9. Through the origin O a straight line is drawn to cut the lines $y = m_1x + C_1$ and $y = m_2x + C_2$ at Q and R. respectively. Find the locus of the point P on this variable line, such that OP is the geometric mean of OQ and OR.

मूल बिन्दु O से जाने वाली एक रेखा इस प्रकार है कि यह रेखाओं $y = m_1x + C_1$ तथा $y = m_2x + C_2$ को क्रमशः Q व R पर काटती है। इस चर रेखा पर स्थित किसी बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए यदि OP, OQ व OR का गुणोत्तर माध्य है।

Ans. $(y - m_1x)(y - m_2x) = c_1c_2$

10. The sides of a triangle are $L_r \equiv x\cos\alpha_r + y\sin\alpha_r - p_r = 0$ for r = 1, 2, 3.
Show that its orthocentre is given by
$L_1\cos(\alpha_2 - \alpha_3) = L_2\cos(\alpha_3 - \alpha_1) = L_3\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$.

त्रिभुज की भुजाएं $L_r \equiv x\cos\alpha_r + y\sin\alpha_r - p_r = 0$, r = 1, 2, 3 के लिए
दर्शाइये कि इसका लम्बकेन्द्र $L_1\cos(\alpha_2 - \alpha_3) = L_2\cos(\alpha_3 - \alpha_1) = L_3\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ होगा।

11. A line passes through a fixed point R intersecting a fixed line at P. A point Q on RP such that $\frac{RP}{RQ}$ is constant. Then show that locus of Q is a straight line.

एक रेखा स्थिर बिन्दु R से स्थिर रेखा को P पर प्रतिच्छेद करती है। एक बिन्दु Q, RP रेखा पर इस प्रकार है कि $\frac{RP}{RQ}$ अचर है तब दर्शाइयें कि Q का बिन्दुपथ एक सरल रेखा है।

12. A triangle ABC with a = 8, b = 6 and c = 10 slides on the coordinate axes with vertices A and B on the x–axis and the y–axis respectively. Find the locus of the vertex C.

एक त्रिभुज ABC जिसमें a = 8, b = 6 और c = 10 निर्देशांक अक्षों पर शीर्ष A और B पर क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष पर फिसलती है तब शीर्ष C का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

13. The line $L_1 \equiv 4x + 3y - 12 = 0$ intersects the x and the y-axis at A and B respectively. A variable line perpendicular to L_1 intersects the x and the y-axis at P and Q respectively. Find the locus of the circumcentre of triangle ABQ.
रेखा $L_1 \equiv 4x + 3y - 12 = 0$, x अंक्ष और y-अंक्ष को A और B पर क्रमशः प्रतिच्छेद करता है। एक चर रेखा L_1 के लम्बवत् x और y-अंक्ष को क्रमशः P और Q पर मिलती है। त्रिभुज ABQ के परिकेन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

14. Show that the orthocentre of Δ formed by the straight lines, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and $\ell x + my = 1$ is a point (x', y') such that $\frac{x'}{\ell} = \frac{y'}{m} = \frac{a+b}{am^2 - 2h\ell m + b\ell^2}$.
दर्शाइये सरल रेखाओं $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ और $\ell x + my = 1$ से बने Δ का लम्बकेन्द्र एक बिन्दु (x', y') है जहाँ $= \frac{x'}{\ell} = \frac{y'}{m} = \frac{a+b}{am^2 - 2h\ell m + b\ell^2}$.

15. Show that the lines joining the origin to the other two points of intersection of the curves $ax^2+2hxy+by^2+2gx = 0$ and $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x = 0$ will be at right angles to one another if $g(a' + b') = g'(a + b)$
प्रदर्शित कीजिये कि वक्रों $ax^2+2hxy+by^2+2gx = 0$ एवं $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मूल बिन्दु से मिलाने वाली रेखाऐं परस्पर लम्बवत् होगी यदि $g(a' + b') = g'(a + b)$

16. The distance of a point (x_1, y_1) from each of two straight lines which passes through the origin of co–ordinates is δ, find the combined equation of these straight lines.
मूल बिन्दु से गुजरने वाली दो सरल रेखाओं से बिन्दु (x_1, y_1) की दूरी δ है। इन सरल रेखाओं की संयुक्त समीकरण ज्ञात कीजिए।
Ans. $(y_1^2 - \delta^2)\, x^2 - 2\, x_1 y_1\, xy + (x_1^2 - \delta^2)\, y^2 = 0$

17. If the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, represents a pair of straight lines, prove that the third pair of straight lines (excluding xy = 0) passing through the points where these meet the axes is
$ax^2 - 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \frac{4fg}{c} \cdot xy = 0.$
यदि समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ सरल रेखा युग्म को व्यक्त करती है तब सिद्ध कीजिए कि सरल रेखाओं का तीसरा युग्म (xy = 0 को छोड़कर) बिन्दुओं से गुजरता है जहाँ ये अक्षों को मिलता है
$ax^2 - 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \frac{4fg}{c} \cdot xy = 0.$

18. A point moves so that the distance between the feet of the perpendiculars from it on the lines $ax^2 + 2h\,xy + by^2 = 0$ is a constant 2d. Show that the equation to its locus is,
$(x^2 + y^2)(h^2 - ab) = d^2 \{(a - b)^2 + 4h^2\}$.
एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इससे रेखाओं $ax^2 + 2h\,xy + by^2 = 0$ पर डाले गए लम्ब के पादों के मध्य दूरी 2 d (अचर) है। प्रदर्शित कीजिए कि इसके बिन्दुपथ की समीकरण $(x^2 + y^2)(h^2 - ab) = d^2 \{(a - b)^2 + 4h^2\}$ है।

19. Show that the pair of lines given by $a^2x^2 + 2h(a + b)\,xy + b^2y^2 = 0$ is equally inclined to the pair given by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.
सिद्ध कीजिऐ कि $a^2x^2 + 2h(a + b)\,xy + b^2y^2 = 0$ द्वारा प्रदर्शित सरल रेखाँऐं,
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ द्वारा प्रदर्शित सरल रेखाओं पर समान कोण पर झुकी हुई है।

20. All the chords of the curve $3x^2 - y^2 - 2x + 4y = 0$ which subtend a right angle at the origin are concurrent. Does this result also hold for the curve, $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y = 0$? If yes, what is the point of concurrence.
मूल बिन्दु पर समकोण बनाने वाली, वक्र $3x^2 - y^2 - 2x + 4y = 0$ की सभी जीवाँऐ संगामी है। क्या यह परिणाम वक्र $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y = 0$ के लिये भी सत्य है ? यदि हाँ, तो वह बिन्दु ज्ञात कीजिऐ जिस पर ये जीवाँऐ संगामी है।
Ans. **(1, – 2), yes हाँ (1/3, – 2/3)**

21. The straight lines $(A^2 - 3B^2)x^2 + 8AB\,xy + (B^2 - 3A^2)\,y^2 = 0$ form a Δ with the line $Ax + By + C = 0$, then prove that
सरल रेखाएं $(A^2 - 3B^2)x^2 + 8AB\,xy + (B^2 - 3A^2)\,y^2 = 0$ रेखा $Ax + By + C = 0$ के साथ एक त्रिभुज का निर्माण करती है तब सिद्ध कीजिए

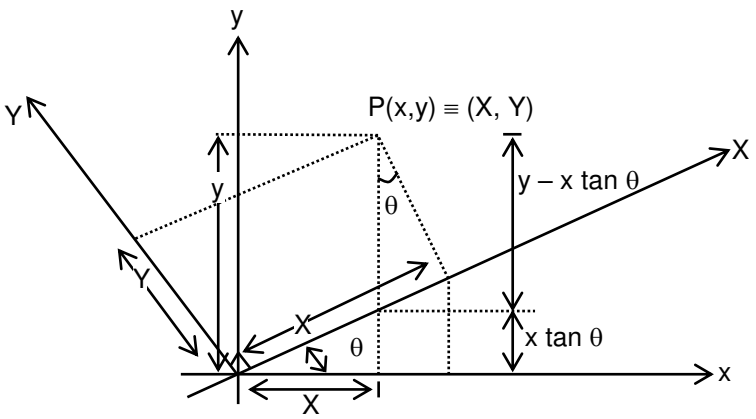
(i) Area of Δ is $\dfrac{C^2}{\sqrt{3}\left(A^2+B^2\right)}$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $\dfrac{C^2}{\sqrt{3}\left(A^2+B^2\right)}$

(ii) Δ is equilateral त्रिभुज समबाहु है।

(iii) The orthocentre of Δ does not lie on one of its vertexs
त्रिभुज का लम्बकेन्द्र, इसके शीर्षो में से एक नहीं है।

Comprehension (Q. 22 & 23)

If coordinate system xy is being rotated through an angle θ in anti clock wise direction about the origin as shown in the diagram, Coordinates of P(x, y) has been change to P(X, Y) in new coordinate system XY, then x, y, X, Y are related as given below.
यदि निर्देशांक पद्धति xy को वामावर्त दिशा में मूल बिन्दु के सापेक्ष θ कोण से घुमाया जाता है। चित्रानुसार दर्शाया गया है। P(x, y) के निर्देशांक को P(X, Y) , नये निर्देशांक पद्धति XY, में बदला जाता है तब x, y, X, Y नीचे दर्शाया गया है–



$X = x\sec\theta + (y - x\tan\theta)\sin\theta$ and और $Y = (y - x\tan\theta)\cos\theta$

$= x\sec\theta + y\sin\theta - \dfrac{x\sin^2\theta}{\cos\theta}$ $= y\cos\theta - x\sin\theta$

$\boxed{X = x\cos\theta + y\sin\theta}$ $\boxed{Y = -x\sin\theta + y\cos\theta}$

22. If the axes are rotated through 60º in anticlockwise direction about origin. Find co-ordinats of point (2, 6) in new co-ordinate axes.
यदि अक्षों को मूल बिन्दु के सापेक्ष वामावर्त दिशा में 60º कोण से घूर्णन कराया जाता है। नयी निर्देशांक अक्षों की पद्धति में बिन्दु (2, 6) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए–

Ans. $(1 + 3\sqrt{3}, -\sqrt{3} + 3)$

23. If axes are rotated through an acute angle in clockwise direction about origin so that equation $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0$ becomes free from xy in its new position, then find equation in new position
यदि अक्षों को मूल बिन्दु के सापेक्ष दक्षिणावर्त दिशा में न्यूनकोण से घुमाया जाता है जबकि समीकरण $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0$ नयी स्थिति में xy से स्वतंत्र है तब नयी स्थिति में समीकरण है–

Ans. $x^2 + \sqrt{2}y = 0$

24. Find the acute angle between two straight lines passing through the point M(–6, –8) and the points in which the line segment $2x + y + 10 = 0$ enclosed between the co–ordinate axes is divided in the ratio 1 : 2 : 2 in the direction from the point of its intersection with the x–axis to the point of intersection with the y–axis.

बिन्दु M(– 6, – 8) से गुजरने वाली दो सरल रेखाओं, जो रेखा 2x + y + 10 = 0 के अक्षों के मध्य के अंतःखण्ड को ऐसे बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है जो इस रेखाखण्ड को इसके x - अक्ष से प्रतिच्छेद से इसके y - अक्ष से प्रतिच्छेद की दिशा में 1 : 2 : 2 के अनुपात में विभाजित करते हैं, के मध्य का न्यून कोण का मान है।

Ans. $\pi/4$

25_. Let A lies on 3x – 4y + 1 = 0. B lies on 4x + 3y – 7= 0 and C is (–2, 5). If ABCD is rhombus, then find locus of D.

माना A, रेखा 3x – 4y + 1 = 0 पर स्थित है तथा, B रेखा 4x + 3y – 7 = 0 पर स्थित है तथा C (–2, 5) है यदि ABCD एक समचतुर्भुज है तब D का बिन्दुपथ है–

Ans. $25((x + 2)^2 + (y – 5)^2) = (3x – 4y + 1)^2$

26_. Let D is point on line ℓ_1 : x + y – 2 = 0 and S(3, 3) is fixed point. ℓ_2 is the line perpendicular to DS and passing through S. If M is another point on line ℓ_1 (other than D), then find locus of point of intersection of ℓ_2 and angle bisector of $\angle$MDS.

माना D, रेखा ℓ_1 : x + y – 2 = 0 पर कोई बिन्दु है तथा S(3, 3) स्थिर बिन्दु है। ℓ_2, DS के लम्बवत् रेखा है तथा S से गुजरती है यदि M, रेखा ℓ_1 पर स्थित कोई अन्य बिन्दु है (D के अलावा) तब $\angle$MDS के कोण अर्द्धक तथा ℓ_2 के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $(x – 3)^2 + (y – 3)^2 = \left(\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right)^2$

27_. A variable line cuts the line 2y = x – 2 and 2y = – x + 2 in points A and B respectively. If A lies in first quadrant, B lies in 4th quadrant and area of ΔAOB is 4, then find locus of

(i) mid point of AB (ii) centroid of ΔOAB

एक चर रेखा, रेखाओं 2y = x – 2 और 2y = – x + 2 को A तथा B बिन्दुओं पर काटती है यदि A प्रथम चतुर्थांश मे स्थित है तथा B द्वितीय चतुर्थांश मे स्थित है तथा ΔAOB का क्षेत्रफल 4 है तब बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

(i) AB का मध्य बिन्दु (ii) ΔOAB का केन्द्रक

Ans. (i) $(x –1)^2 – 4y^2 = 9$ (ii) $(x – 2/3)^2 + 4y^2 = 4$

28. An equilateral triangle PQR is formed where P (1, 3) is fixed point and Q is moving point on line x = 3. Find the locus of R.

एक समबाहु त्रिभुज PQR बनाया जाता है जहाँ P (1, 3) एक स्थिर बिन्दु है। तथा रेखा Q रेखा x = 3 पर चर बिन्दु है तब R का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $(x – 2) = \pm\sqrt{3}\,(y – 3 \pm \sqrt{3})$

Answers